H 18. Sei $ggT(a, b)$ ein größter gemeinsamer Teiler von $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $ma + nb = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ genau dann ganzzahlige Lösungen $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ besitzt, wenn $ggT(a, b)$ Teiler von c ist.
2. Geben Sie für $6m - 9n = 15$ **alle** ganzzahligen Lösungen $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an.
   Hinweis: Betrachte die Differenz zweier Lösungen der "gekürzten" Gleichung.

1. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ bezeichne $a|b$ ... a teilt b, d.h. $\exists m \in \mathbb{Z}: b = ma$

Ist d ein $ggT(a,b) \Rightarrow d|a \wedge d|b \Rightarrow d \mid (ma+nb) \quad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Damit folgt:

Sind (m,n) Lösungen von $ma+nb=c \Rightarrow d|c$, d.h. $\exists k \in \mathbb{Z}: c = k\cdot d$ $(*)$

Diese notwendige Bedingung ist auch hinreichend, da es nach dem euklidischen Algorithmus $(\bar m, \bar n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ gibt mit $\bar m a + \bar n b = ggT(a,b) = d$

Multiplikation dieser Gleichung mit k liefert $(k\bar m)a + (k\bar n)b = k\cdot d \overset{(*)}{=} c$

$\Rightarrow (m,n) = (k\bar m, k\bar n)$ ist eine Lösung von $ma+nb=c$ (1)

2. Alle Lösungen von $6m - 9n = 15$ (1) $a = 6$, $b = -9$, $c = 15$, $ggT(6,-9) = \pm 3$

Für $d=3$ gilt: $6\bar m - 9\bar n = 3$ z.B. für $\bar m = -1$, $\bar n = -1$

Mit $k = \frac{c}{d} = 5$ erhält man eine Lösung von (1) als $(k\bar m, k\bar n) = (-5,-5)$

Was unterscheidet zwei Lösungen (m_1,n_1) und (m_2,n_2) von (1)?

$$\left.\begin{array}{l} m_1 a + n_1 b = c \\ m_2 a + n_2 b = c \end{array}\right\} \Rightarrow (m_1-m_2)a + (n_1-n_2)b = 0 \Leftrightarrow (m_1-m_2)a = (n_2-n_1)b$$

Kürzen mit $d \in ggT(a,b)$, d.h. $\exists \bar a, \bar b \in \mathbb{Z}$, $a = d\bar a$, $b = d\bar b \wedge ggT(\bar a, \bar b) = 1$

liefert $(m_1-m_2)\bar a = (n_2-n_1)\bar b \Rightarrow \bar a \mid (n_2-n_1)$, d.h. $\exists \lambda \in \mathbb{Z}: n_2-n_1 = \lambda \bar a$

und $(m_1-m_2)\bar a = \lambda \bar a \bar b$, d.h. $m_1 - m_2 = \lambda \bar b$

Wir erhalten: Ist (m_1,n_1) eine Lösung von (1), so erhält man mit

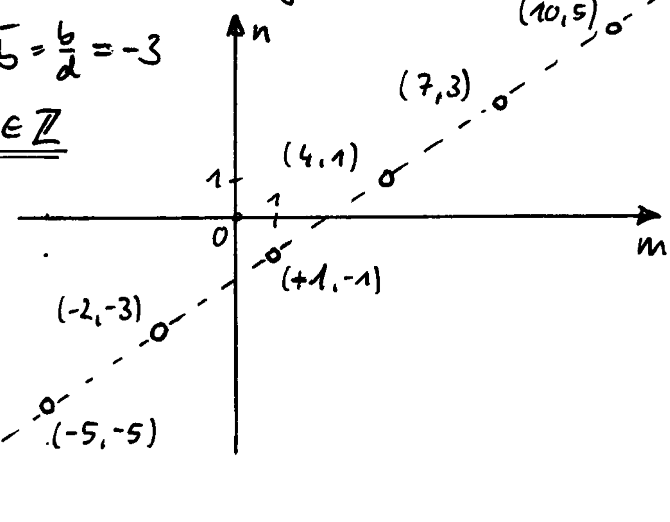
$(m,n) = (m_1 - \lambda\bar b, n_1 + \lambda \bar a)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ alle Lösungen von (1)

Mit $d=3$ erhält man $\bar a = \frac{a}{d} = 2$, $\bar b = \frac{b}{d} = -3$

also $(m,n) = (-5+3\lambda, -5+2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

Geometrische Deutung:

Die Lösungen von $6m - 9n = 15$ sind alle Gitterpunkte in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, welche die Gerade $6m-9n=15$ trifft.



H 19. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_6, \bigoplus_6)$.

$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ mit Addition modulo 6 : $\oplus_6$ ist eine Gruppe

Triviale Untergruppen sind $\underline{\mathbb{Z}_6}$ und $\underline{\{0\}}$.

Jede (echte) Untergruppe U von $\mathbb{Z}_6$ muss die 0 als neutrales Element enthalten.

<u>Fallunterscheidung:</u>

<u>Fall 1:</u> U enthält 1 oder 5 $\Rightarrow U = \mathbb{Z}_6$ denn:

- mit 1 enthält U auch $1 \oplus_6 1 = 2$, $1 \oplus_6 2 = 3$, $1 \oplus_6 3 = 4$, $1 \oplus_6 4 = 5$ und $1 \oplus_6 5 = 0$
- mit 5 enthält U auch $5 \oplus_6 5 = 4$, $5 \oplus_6 4 = 3$, $5 \oplus_6 3 = 2$, $5 \oplus_6 2 = 1$ und $5 \oplus_6 1 = 0$

<u>Fall 2:</u> Suche Untergruppen, die weder 1 noch 5 enthalten:

<u>Fall 2.1:</u> Enthält U die 2, so auch $2 \oplus_6 2 = 4$ und $2 \oplus_6 4 = 0$

$\Rightarrow \underline{\{0, 2, 4\}}$ ist eine Untergruppe !

<u>Fall 2.2:</u> Enthält U die 3, so auch $3 \oplus_6 3 = 0$

$\Rightarrow \underline{\{0, 3\}}$ ist eine Untergruppe !

Das sind schon alle Untergruppen, denn:

- enthält U die 4, so auch $4 \oplus_6 4 = 2$ $\Rightarrow$ Fall 2.1.
- enthält U die 2 und die 3, so auch $2 \oplus_6 3 = 5$ $\Rightarrow$ Fall 1.

$\Rightarrow \{0\}, \{0, 3\}, \{0, 2, 4\}$ und $\mathbb{Z}_6$ sind alle Untergruppen von $\mathbb{Z}_6$

<u>zu H20 aus Vorlesung:</u> $(G, \circ), (H, \bullet)$ seien Gruppen und $f: G \to H$ eine Abbildung

$\ker(f) := \{ g \in G \mid f(g) = e_H \}$

$\text{Bild}(f) := \{ f(g) \in H \mid g \in G \} = \{ h \in H \mid \exists g \in G : f(g) = h \} = f(G)$ beachte unterschiedliche Sichtweise

f injektiv $\Leftrightarrow (\forall x, y \in G$ mit $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

$\Leftrightarrow (\forall x, y \in G$ mit $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

$\Leftrightarrow \forall y \in \text{Bild}(f)\ \exists_1 x \in G : f(x) = y$ (Abb „eineindeutig")

f surjektiv $\Leftrightarrow \forall y \in H\ \exists x \in G : f(x) = y \Leftrightarrow \text{Bild}(f) = H$.

H 20. Welche der folgenden Abbildungen sind surjektiv, injektiv bzw. bijektiv? Bestimmen Sie jeweils $Kern(f)$ und beschreiben Sie $Bild(f)$.

$$\begin{array}{llll} f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, & (x,y) & \mapsto & 3x-2y \\ f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}, & (x,y) & \mapsto & (x-y,\, x+y) \\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}, & x & \mapsto & (2x,\, x-1) \\ f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}, & (x,y) & \mapsto & (xy,\, x+y) \end{array}$$

1. $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $H=\mathbb{R}$, $f(x,y)=3x-2y$

Kern(f) Ansatz $f(x,y)=0 \Leftrightarrow 3x-2y=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x \Rightarrow$ Kern(f) $=\{(x,\frac{3}{2}x)\mid x\in\mathbb{R}\}$

f ist surjektiv, da $\forall z\in\mathbb{R}: f(x,y)=z \Leftrightarrow 3x-2y=z \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(3x-z)$,

d.h. $f(x,\frac{1}{2}(3x-z))=z \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Bild(f) $=\mathbb{R}$

f nicht injektiv, da $|Kern(f)|>1$ bzw. $f(0,0)=f(2,3)=0$ ein Gegenbeispiel ist bzw. die Urbilder nicht eindeutig sind.

2. $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $H=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x-y,x+y)$ (komponentenweise)

Kern(f) Ansatz $f(x,y)=(0,0) \overset{(K)}{\Leftrightarrow} \begin{matrix}x-y=0\\x+y=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}2x=0\\2y=0\end{matrix} \Leftrightarrow$ Kern(f) $=\{(0,0)\}$

f ist surjektiv, da $\forall (u,v)\in H=\mathbb{R}\times\mathbb{R}: f(x,y)=(x-y,x+y)=(u,v) \overset{(K)}{\Leftrightarrow}$

$\begin{matrix}x-y=u\\x+y=v\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}2x=u+v\\2y=v-u\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x=\frac{1}{2}(u+v)\\y=\frac{1}{2}(v-u)\end{matrix}$, d.h. $f(\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2}(v-u))=(u,v) \Rightarrow$ Bild f $=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

f ist injektiv, da $\forall (u,v)\in H=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \exists_1 (x,y)=(\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2}(v-u))$ mit $f(x,y)=(u,v)$

bzw. $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2) \Leftrightarrow (x_1-y_1,x_1+y_1)=(x_2-y_2,x_2+y_2) \overset{(K)}{\Leftrightarrow}$

$\begin{matrix}x_1-y_1=x_2-y_2\\x_1+y_1=x_2+y_2\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}2x_1=2x_2\\2y_1=2y_2\end{matrix} \Leftrightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ | f ist also bijektiv

3. $G=\mathbb{R}$, $H=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(x)=(2x,x-1)$

Kern(f) Ansatz $f(x)=(0,0) \overset{(K)}{\Leftrightarrow} \begin{matrix}2x=0\\x-1=0\end{matrix} \Leftrightarrow x=0\wedge x=+1$ ↯ $\Rightarrow$ Kern(f) $=\{\ \}$

$\Rightarrow$ f ist nicht surjektiv

f ist injektiv, da $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow (2x_1,x_1-1)=(2x_2,x_2-1)\overset{(K)}{\Leftrightarrow} x_1=x_2$ $\quad s\in\mathbb{R}$

Bild(f) $=\{(2x,x-1)\in\mathbb{R}^2\mid x\in\mathbb{R}\}$ ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: $g:\binom{u}{v}=\binom{0}{-1}+s\binom{2}{1}$.

4. $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $H=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x\cdot y,x+y)$

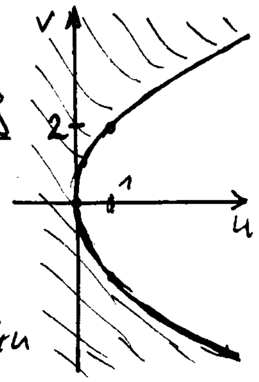
Kern(f) Ansatz $f(x,y)=(0,0)\overset{(K)}{\Leftrightarrow} \begin{matrix}x\cdot y=0\\x+y=0\end{matrix} \Leftrightarrow x=y=0 \Rightarrow$ Kern(f) $=\{0,0\}$

f nicht injektiv, da $f(1,2)=f(2,1)=(2,3)$ allgem. $f(x,y)=f(y,x)$

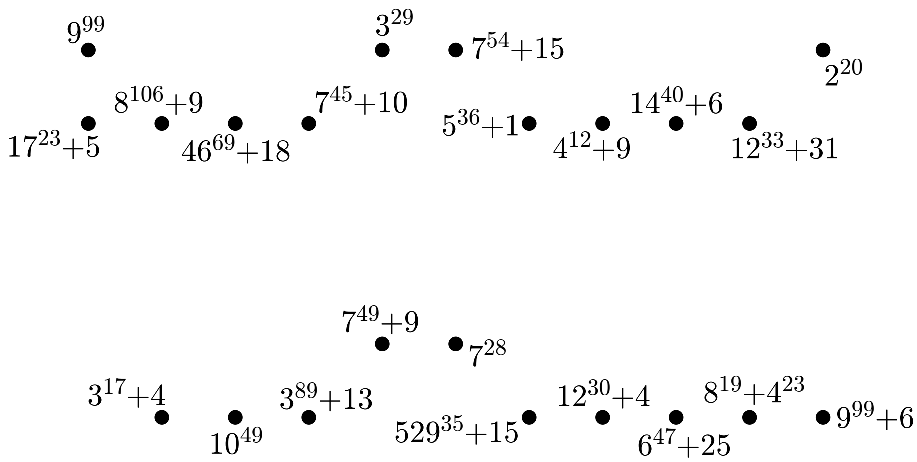
f nicht surjektiv, da $f(x,y)=(xy,x+y)=(u,v)\in H=\mathbb{R}\times\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\begin{matrix}x\cdot y=u\\x+y=v\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x\cdot y=u\\y=v-x\end{matrix} \Rightarrow xv-x^2=u \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1}{2}(v\pm\sqrt{v^2-4u})\notin\mathbb{R}$ für $v^2<4u$

z.B. $(1,0)\notin f(\mathbb{R}\times\mathbb{R})=$ Bild(f) $=\{(u,v)\mid v^2\geq 4u\}$ vgl. Skizze



Aufgabe 21. Malen nach Zahlen modulo 23.



Schliessen Sie Ihre Augen und versetzen Sie sich in die Zeit, in der Malbücher noch eine große Faszination auf Sie ausüben konnten. Blättern Sie in Gedanken in einem solchen Buch. Öffnen Sie nun wieder Ihre Augen — Erinnert Sie unser “Bild” nun an eines aus Ihrem Malbuch?

Falls nicht: Berechnen Sie die angegebenen Zahlen modulo 23. Jeder dicke schwarze Punkt erhält danach eine Nummer zwischen 0 und 22. Verbinden Sie nun die Punkte in der richtigen Reihenfolge. ... und die Realität wird Sie wieder begrüssen. Viel Spass!

LÖSUNG: