

— Präsenzaufgaben —

M 14. Untergruppen

Gegeben seien die folgenden Gruppen und Teilmengen. Entscheiden Sie, welche der Teilmengen Untergruppen sind:

1) Für die Gruppe $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus_{12})$

- $\{\}$
- $\{0, 4, 8\}$
- $\{6\}$
- $\{0, 3, 5, 8\}$

2) Für die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$

- $\{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- $\{x \in \mathbb{R} \mid 5x + 1 = 0\}$
- $\{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

Zusatz: Welche Elemente müsste man zu den Teilmengen, die keine Untergruppen bilden, mindestens hinzunehmen, damit sie Untergruppen werden.

P 15. Division mit Rest

1. Berechnen Sie (möglichst ohne großen Aufwand) die Zahlen

$$(17 + 13) \pmod{3}, \quad (17 \cdot 6) \pmod{11}, \quad 5^9 \pmod{7}.$$

2. Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler (ggT) der Zahlen $a = 4620$ und $b = 225$, und finden Sie Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(a, b) = ma + nb$.

3. Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler (ggT) der Polynome

$$f(X) = X^5 + X^4 - 2X^2 - 9X - 22 \quad \text{und} \quad g(X) = X^3 + X^2 - 3X - 6.$$

4. Geben Sie zwei ganze Zahlen $a, b < 1000$ an, so dass sich bei Division von a und b mit einem Taschenrechner der Näherungswert 2,3088235 einstellt.

P 16. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$.

— Zentrale Präsenzaufgaben —

Z 17. Kern und Bild

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - 3y + z, -x + 2y, y - z)$

1. Bestimmen Sie $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$.

2. Ist f ein Homomorphismus? Ist dieser injektiv oder surjektiv?

— Hausaufgaben —

H 18. Sei $ggT(a, b)$ ein größter gemeinsamer Teiler von $a, b \in \mathbb{Z}$.

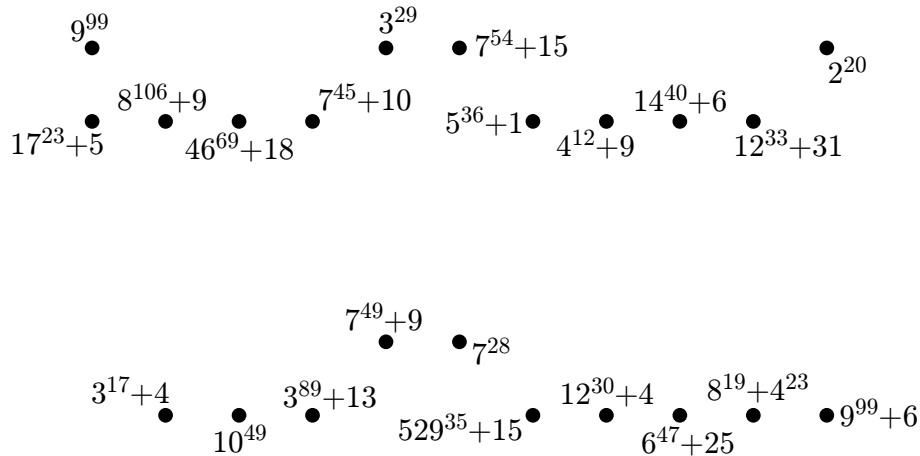
1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $ma + nb = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ genau dann ganzzahlige Lösungen $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ besitzt, wenn $ggT(a, b)$ Teiler von c ist.
2. Geben Sie für $6m - 9n = 15$ **alle** ganzzahligen Lösungen $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an.
Hinweis: Betrachte die Differenz zweier Lösungen der "gekürzten" Gleichung.

H 19. Bestimmen Sie alle Untergruppen von (\mathbb{Z}_6, \oplus_6) .

H 20. Welche der folgenden Abbildungen sind surjektiv, injektiv bzw. bijektiv?
Bestimmen Sie jeweils $Kern(f)$ und beschreiben Sie $Bild(f)$.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto 3x - 2y \\ f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto (x - y, x + y) \\ f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, & x &\mapsto (2x, x - 1) \\ f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto (xy, x + y) \end{aligned}$$

H 21. Malen nach Zahlen modulo 23.



Schliessen Sie Ihre Augen und versetzen Sie sich in die Zeit, in der Malbücher noch eine große Faszination auf Sie ausüben konnten. Blättern Sie in Gedanken in einem solchen Buch. Öffnen Sie nun wieder Ihre Augen — Erinnert Sie unser "Bild" nun an eines aus Ihrem Malbuch?

Falls nicht: Berechnen Sie die angegebenen Zahlen modulo 23. Jeder dicke schwarze Punkt erhält danach eine Nummer zwischen 0 und 22. Verbinden Sie nun die Punkte in der richtigen Reihenfolge. ... und die Realität wird Sie wieder begrüßen. Viel Spass!

Abgabetermin ist der 19.11.2007 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).