Aufgabe 11. Sei D die Menge aller rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$, für die gilt:
In einer gekürzten Bruchdarstellung $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ ist q durch 7 teilbar.

a) Ist $(D, +)$ eine Gruppe? Begründung!

b) Ist $(D, \cdot)$ eine Gruppe? Begründung!

<u>LÖSUNG:</u>

Elemente von D sind z.B.: $\frac{1}{7}, \frac{4}{21}, \frac{37}{14}, \ldots$

a) Bei $(D, +)$ ist schon die Abgeschlossenheit verletzt, da $\frac{1}{7} + \frac{6}{7} = \frac{7}{7} = 1 \notin D$!

b) $(D, \cdot)$ ist zwar abgeschlossen aber es existiert kein neutrales Element, da aus
$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ folgt $\frac{m}{n} = 1 \notin D$!

Aufgabe 12. Vervollständigen Sie die Gruppentafel.

	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

<u>LÖSUNG:</u>

Um die unvollständige Gruppentafel zu vervollständigen können folgende Argumente genutzt werden:

1.) In der vierten Spalte und vierten Zeile steht der Eintrag „$x^2 = x$“. Daraus folgt, dass x das neutrale Element der Gruppe sein muss. Damit sind bereits alle Eintragungen der vierten Spalte und der vierten Zeilen eindeutig festgelegt.
Zudem kann man verwenden, dass das linksinverse Element gleich dem rechtsinversen Element ist.

2.) In jeder Zeile und in jeder Spalte kann jedes Element der Gruppe nur genau einmal vorkommen. Sind also in einer Zeile oder Spalte 5 der 6 Eintragungen bekannt, ist der sechste Eintrag bereits eindeutig bestimmt.

3.) Obiges Argument lässt sich noch wie folgt erweitern: Fehlen in einer Zeile (Spalte) *zwei* Einträge, gibt es genau zwei Möglichkeiten, diese beiden fehlenden Einträge zu positionieren. Da jedes Element jeweils in einer Zeile *und* in einer Spalte steht, kann sich bei einer der beiden Möglichkeiten ein Widerspruch zur Spalte (Zeile) ergeben (Beispiel siehe unten).

4.) Die in der Gruppentafel angegebenen Relationen $ay = c$, $az = b$, $b^2 = x$, usw. sowie die jeweils beim Ausfüllen neu dazukommenden Relationen, können (und müssen) verwendet werden (Beispiel siehe unten).

Eine Möglichkeit, unsere Gruppentafel auszufüllen, wäre folgende:
Wir starten mit der gegebenen Gruppentafel (Tabelle 1).
1. Schritt: Aus dem Eintrag $x^2 = x$ folgt, dass x das neutrale Element ist, woraus wiederum die Eintragungen der vierten Zeile und Spalte folgen. Zudem ergibt sich wegen „linksinvers = rechtsinvers“aus $zy = x$ auch $yz = x$ (Tabelle 2).
2. Schritt: Nun stehen in der zweiten Spalte vier von sechs Einträgen. Es fehlen die Einträge c und z. In der ersten Zeile der zweiten Spalte kann aber das c *nicht* stehen, weil das c in dieser Zeile bereits schon aufgeführt ist. Damit ist klar, welche der beiden Möglichkeiten gewählt werden muss (Tabelle 3).
3. Schritt: Jetzt benutzen wir die beiden Relationen $b^2 = x$ und $bc = z$, um den Eintrag von bz zu bestimmen: $bz = b(bc) = (bb)c = xc = c$, da x das neutrale Element ist (Tabelle 4).
4. Schritt: Die zweite Zeile von Tabelle 4 lässt sich nun analog zum 2. Schritt ausfüllen; ebenso der Reihe nach die letzte Spalte, dann die letzte Zeile, dann die dritte Spalte, wobei in dieser Spalte $ac = y$ gelten muss, da y weder in der dritten noch in der vierten Zeile der dritten Spalte stehen kann. Damit folgt $aa = x$.
alternativ: Wegen $zb = a,\ az = b$ und $bb = x$ (vgl. Tabelle 4) folgt: $aa = a(zb) = (az)b = bb = x$, womit die erste Zeile auch klar ist (Tabelle 5).
5. Schritt: Jetzt fehlen nur noch die Einträge b und z für ca, cy, ya, yy.
Wegen $ab = z,\ ac = y,\ cb = y$ und $c^2 = x$ folgt $y^2 = (ac)(cb) = a(cc)b = ab = z$, womit alle vier Einträge klar sind.
alternativ: mit Widerspruch: Aus der Annahme: $y^2 = b$ folgt mit $zb = a$ und $zy = x$:
$a = zb = z(yy) = (zy)y = xy = y$, womit ebenfalls alle vier Einträge klar sind.

Tabelle 1:

	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Tabelle 2:

	a	b	c	x	y	z
a				a	c	b
b		x	z	b		
c		y		c		
x	a	b	c	x	y	z
y				y		x
z		a		z	x	

Tabelle 3:

	a	b	c	x	y	z
a		z		a	c	b
b		x	z	b		
c		y		c		
x	a	b	c	x	y	z
y		c		y		x
z		a		z	x	

Tabelle 4:

	a	b	c	x	y	z
a		z		a	c	b
b		x	z	b		c
c		y		c		
x	a	b	c	x	y	z
y		c		y		x
z		a		z	x	

Tabelle 5:

	a	b	c	x	y	z
a	x	z	y	a	c	b
b	y	x	z	b	a	c
c		y	x	c		a
x	a	b	c	x	y	z
y		c	a	y		x
z	c	a	b	z	x	y

Fertige Gruppentafel:

	a	b	c	x	y	z
a	x	z	y	a	c	b
b	y	x	z	b	a	c
c	z	y	x	c	b	a
x	a	b	c	x	y	z
y	b	c	a	y	z	x
z	c	a	b	z	x	y

Bemerkungen:
1.) Aufgrund der Verknüpfungstafel ist $(\{a, b, c, x, y, z\}, \cdot)$ abgeschlossen mit dem neutralen Element x und zu jedem Element existiert ein inverses Element. Die Assoziativität müsste jedoch noch explizit nachgewiesen werden. Die Gruppe ist offenbar nicht kommutativ.
2.) Bei dieser Gruppe handelt es um die Symmetriegruppe S_3 des gleichseitigen Dreiecks. Die Elemente a, b, c entsprechen den drei Spiegelungen an den Höhen der Dreiecksseiten; die Elemente x, y, z entsprechen den drei Drehungen um den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Winkeln "0^o" (d.h. der Identität), 120^o und 240^o".

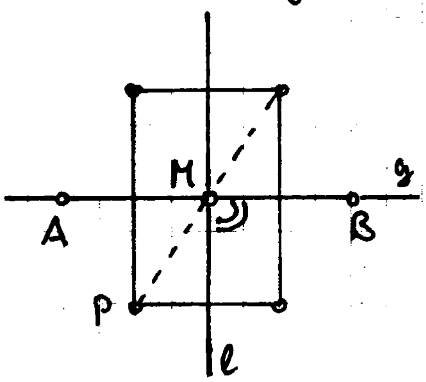
H 13. Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$ der euklidischen Ebene.

a) Geben Sie die vier abstandserhaltenden Abbildungen der euklidischen Ebene an, welche das Punktepaar (A, B) invariant lässt (d.h. „$f(\{A, B\}) = \{A, B\}$").

b) Zeigen Sie, dass die Menge S dieser Abbildungen bzgl. der Hintereinanderausführung $\circ$ abgeschlossen ist.

c) Überprüfen Sie, ob $(S, \circ)$ eine Gruppe ist, und stellen Sie gegebenenfalls die Gruppentafel auf.

a) Seien M der Mittelpunkt, l das Mittellot und g die Verbindungsgerade von A und B. Dann sind



$f_1 = id$ Identität $f(X) = X \ \forall X$

$f_2 = \sigma_g$ Achsenspiegelung an $g = AB$

$f_3 = \sigma_l$ Achsenspiegelung an l

$f_4 = \sigma_M$ Punktspiegelung an l

offenbar 4 abstandserhaltende Abbildungen (Bewegungen), welche das Punktepaar $\{A, B\}$ invariant lassen. Warum „die"?

<u>Bemerkung</u>: Wegen $f(\{A,B\}) = \{A,B\}$ ist M ein Fixpunkt von f, womit f entweder eine Drehung um M mit Winkel φ oder eine Achsenspiegelung an einer Achse a durch M ist.

Im Fall $f(A) = A$ und $f(B) = B$ gilt $\varphi = 0$, d.h. $f = \delta_{M,0} = id$ oder $a = AB = g$, d.h. $f = \sigma_g$

Im Fall $f(A) = B$ und $f(B) = A$ gilt $\varphi = \pi$, d.h. $f = \delta_{M,\pi} = \sigma_M$ oder $a \perp AB$ durch M, d.h. $f = \sigma_l$

Die angegebenen Abbildungen sind die einzigen mit $f(\{A,B\}) = \{A,B\}$.

b)

	id	σ_g	σ_l	σ_M
id	id	σ_g	σ_l	σ_M
σ_g	σ_g	id	σ_M	σ_l
σ_l	σ_l	σ_M	id	σ_g
σ_M	σ_M	σ_l	σ_g	id

Zur Überprüfung der Abgeschlossenheit stellen wir die Verknüpfungstafel auf, wobei die 1. Zeile und 1. Spalte trivial sind.

Ferner gilt offensichtlich:

$id = \sigma_g \circ \sigma_g = \sigma_e \circ \sigma_e = \sigma_M \circ \sigma_M$ und $\sigma_g \circ \sigma_e = \sigma_M = \sigma_e \circ \sigma_g$ (1)
da die Komposition zweier Achsenspiegelungen mit schneidenden Achsen eine Drehung um den Schnittpunkt der Achsen mit doppeltem Zwischenwinkel als Drehwinkel ist, d.h. $\sigma_g \circ \sigma_e = \delta_{M,\pi} = \sigma_M$ (alternativ Betrachte Bilder eines Punktes P)

Mit (1) folgt: $\sigma_M \circ \sigma_g = (\sigma_e \circ \sigma_g) \circ \sigma_g = \sigma_e \circ (\sigma_g \circ \sigma_g) = \sigma_e \circ id = \sigma_e$
analog folgt: $\sigma_M \circ \sigma_e = \sigma_g$, $\sigma_e \circ \sigma_M = \sigma_g$, $\sigma_g \circ \sigma_M = \sigma_e$.
Damit ist die Menge S bzgl. $\circ$ abgeschlossen.

c) Der Verknüpfungstabelle entnimmt man:

1) id ist das Neutrale Element
2) $\sigma_g, \sigma_e, \sigma_M$ sind zu sich selbst invers
3) Nachweis der Assoziativität nur beispielhaft:

$$\left.\begin{array}{l} (\sigma_g \circ \sigma_e) \circ \sigma_g = \sigma_M \circ \sigma_g = \sigma_e \\ \sigma_g \circ (\sigma_e \circ \sigma_g) = \sigma_g \circ \sigma_M = \sigma_e \end{array}\right\} \text{qed.}$$

[Komposition von Abbildungen ist stets assoziativ, vgl. Aufgabe 8 !]

womit $(S, \circ)$ eine Gruppe ist, die sogar abelsch ist, vgl. Gruppentafel = Verknüpfungstabelle.