TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 & Mathematik für Physiker 1 (WS 2007/08)
— Aufgabenblatt 1 (29. Oktober 2007) —

— Multiple choice - Aufgaben —

M 7. Abgeschlossene Operatoren.
Entscheiden Sie, welche der angegebenen Mengen bezüglich der jeweils angegebenen Operationen abgeschlossen sind:

	$\frac{1}{(\ldots)}$	$\sqrt{\ldots}$	5% von ...	200% von ...	$2^{(\ldots)}$
$\mathbb{N}$					
$\mathbb{Z}-\{0\}$					
$\mathbb{Q}$					
$\mathbb{R}$					
$\mathbb{R}^+$					
$\mathbb{C}$					

M 8. Wer wird Millionär mit Gruppenaxiomen.
Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Das zu $g \in G$ inverse Element werde mit g^{-1} bezeichnet. Welche der folgenden Aussagen sind für alle Gruppen richtig ?

☐ $\exists h \in G\ \ \forall g \in G:\ h \circ g = e$

☐ $\forall g \in G\ \ \forall f \in G:\ g \circ f \circ g^{-1} = f$

☐ $\forall g, f, h, k \in G:\ (g \circ f) \circ (h \circ k) = g \circ ((f \circ h) \circ k)$

☐ $\exists h \in G\ \ \forall g \in G:\ h \circ g = h$

☐ $\forall g \in G\ \ \exists h \in G:\ h \circ g = e$

— Präsenzaufgaben —

P 9. Sei $\mathbb{Q}[x] := \left\{ \sum\limits_{i=0}^{n} q_i x^i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\ ,\ q_i \in \mathbb{Q} \right\}$ die Menge der Polynome in x mit rationalen Koeffizienten.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{7}], +)$ und $(\mathbb{Q}[\sqrt{7}] \setminus \{0\}, \cdot)$ bezüglich der Addition bzw. Multiplikation in $\mathbb{R}$ Gruppen sind.

P 10. Sudoku und endliche Gruppen

1. Wie viele unterschiedliche Gruppen mit jeweils 1, 2, 3, 4, 5 Elementen gibt es?
2. Geben Sie die jeweiligen Gruppentafeln an.
   Der vollständige Nachweis der Assoziativität darf dabei weggelassen werden.
3. Welche dieser Gruppen $(G,\circ)$ sind kommutativ (d.h. $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$) ?

— *Hausaufgaben* —

H 11. Sei D die Menge aller rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$, für die gilt:
In einer gekürzten Bruchdarstellung $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ ist q durch 7 teilbar.

a) Ist $(D, +)$ eine Gruppe? Begründung!

b) Ist $(D, \cdot)$ eine Gruppe? Begründung!

H 12. Vervollständigen Sie die Gruppentafel.

	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

H 13. Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$ der euklidischen Ebene.

a) Geben Sie die vier abstandserhaltenden Abbildungen der euklidischen Ebene an, welche das Punktepaar (A, B) invariant lässt (d.h. „$f(\{A, B\}) = \{A, B\}$“).

b) Zeigen Sie, dass die Menge S dieser Abbildungen bzgl. der Hintereinanderausführung $\circ$ abgeschlossen ist.

c) Überprüfen Sie, ob $(S, \circ)$ eine Gruppe ist, und stellen Sie gegebenenfalls die Gruppentafel auf.

Abgabetermin ist der 12.11.2007 bis 12:00 Uhr (Einwurfkasten im Untergeschoss des FMI-Gebäudes).