P 1. Gerade und Parabel

In einem reellen xy-Koordinatensystem sind die Punkte $P = (0;2)$, $Q = (3;5)$ und $R = (1;\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie $m, t, \lambda \in \mathbb{R}$ so, dass die durch die reelle Funktion $x \mapsto mx + t$ gegebene Gerade die Punkte P, Q und R enthält.

b) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die durch die reelle Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$ gegebene Parabel die Punkte P, Q und R enthält.

a) Ansatz: Gerade $g: y = m \cdot x + t$

$P = (0;2) \in g \Leftrightarrow 2 = 0 \cdot m + t \Rightarrow \underline{t = 2}$ } zwei Gleichungen für

$Q = (3;5) \in g \Leftrightarrow 5 = 3 \cdot m + t \Rightarrow \underline{m = 1}$ } zwei Unbekannte

$R = (1;\lambda) \in g \Leftrightarrow \lambda = 1 \cdot m + t \Leftrightarrow \underline{\lambda = 3}$ (← überbestimmt)

$\underline{g: y = x + 2}$ Eine Gerade g ist bereits durch zwei Punkte $P \neq Q$ festgelegt. R liegt nur für ein bestimmtes $\lambda \in \mathbb{R}$ auf g.

b) Ansatz: Parabel $p: y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$P = (0;2) \in p \Leftrightarrow 2 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + c \Rightarrow \underline{c = 2}$ zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$

$Q = (3;5) \in p \Leftrightarrow 5 = 9 \cdot a + 3 \cdot b + c \Rightarrow 3 = 9 \cdot a + 3 \cdot b$ } zwei Gl. für

$R = (1;\lambda) \in p \Leftrightarrow \lambda = 1 \cdot a + 1 \cdot b + c \quad \lambda - 2 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$ } zwei Unbekannt

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 1 = 3 \cdot a + 1 \cdot b \\ \lambda - 2 = 1 \cdot a + 1 \cdot b \end{array}$ Multiplikation/Division einer Gleichung mit Faktor $\neq 0$ ändert Lösungsmenge nicht!

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 1 = 3 \cdot a + 1 \cdot b \\ \lambda - 3 = -2 \cdot a + 0 \cdot b \end{array}$ Addition/Subtraktion eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen ändert Lösungsmenge nicht!

$\Leftrightarrow \underline{a = \frac{3-\lambda}{2}}$ und $\underline{b} = 1 - 3 \cdot \frac{3-\lambda}{2} = \underline{\frac{3\lambda - 7}{2}} \Rightarrow \underline{p: y = \frac{3-\lambda}{2} x^2 + \frac{3\lambda-7}{2} x + 2}$

Bemerkungen: 1) $a = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \Leftrightarrow P, Q, R$ liegen kollinear vgl. a)

2) Allgemeine Form einer linearen Gleichung:

$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = \beta$ mit Koeffizienten α_i, β und Unbekannten

3) zulässige Umformungen von Gleichungssystemen:

(i) Vertauschen von Gleichungen!

(ii) Multiplikation/Division einer Gleichung mit einem Faktor $\neq 0$!

(iii) Addition/Subtraktion eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen!

(Gegeben seien $f(x) = 0 \wedge g(x) = 0$ sowie $h(x) = g(x) + \lambda \cdot f(x)$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$
Dann gilt : x erfüllt $f(x) = 0 \wedge g(x) = 0 \Rightarrow x$ erfüllt $f(x) = 0 \wedge h(x) = 0$
und umgekehrt : x erfüllt $f(x) = 0 \wedge h(x) = 0 \Rightarrow x$ erfüllt $f(x) = 0 \wedge g(x) = 0$ qed)

P 2. Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.

Gegeben sind die beiden linearen Gleichungssysteme

$$(i)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \qquad\qquad (ii)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & a \\ x & & & + & 2z & = & b \\ & & 2y & - & z & = & c \end{array}$$

1. Bestimmen Sie alle Lösungen $x, y, z \in \mathbb{R}$ des linearen Gleichungssystems (i).
2. Geben Sie ein Tripel $a, b, c \in \mathbb{R}$ an, für das das lineare Gleichungssystem (ii) in $x, y, z \in \mathbb{R}$ nicht lösbar ist.

(i) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem in (Zeilenstufenform)

$$\begin{array}{llcllcll} (1) & x+2y+z=1 & & (1') & x+2y+z=1 & & (1'') & x+2y+z=1 \\ (2) & x \quad\;\; +2z=1 & \Leftrightarrow & (2') & -2y+z=0 & \Leftrightarrow & (2'') & -2y+z=0 \\ (3) & \quad 2y-z=0 & & (3') & 2y-z=0 & & (3'') & 0=0 \end{array}$$

(Addition des (−1)-fachen der 1. Gleichung zur 2.) (Addition des 1-fachen der 2. Gleichung zur 3.)

Die Gleichung (3'') ist offenbar trivial erfüllt. Daher bleiben nur 2 Gleichungen für 3 Unbekannte x, y, z.

Wähle z.B. $\underline{z = s \in \mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ aus (2''): $\underline{y = \frac{1}{2}s}$ (Rückwärtsschritt)

$\Rightarrow$ aus (1''): $\underline{x} = 1 - 2y - z = \underline{1 - 2s}$

Das System (i) hat also eine 1-parametrige Lösungsmenge.

<u>Bemerkung</u>: Deutet man x, y, z als Koordinaten von Punkten im 3-dimensionalen Raum, so ist die Lösungsmenge von (i) eine Gerade
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ mit Aufpunkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$
als Schnitt dreier Ebenen.

(ii) Analoge Umformungen liefern für das Gleichungssystem (ii)

$$\begin{array}{llcllcll} (1) & x+2y+z=a & & (1') & x+2y+z=a & & (1'') & x+2y+z=a \\ (2) & x \quad\;\; +2z=b & \Leftrightarrow & (2') & -2y+z=b-a & \Leftrightarrow & (2'') & -2y+z=b-a \\ (3) & \quad 2y-z=c & & (3') & 2y-z=c & & (3'') & 0=c+b-a \end{array}$$

Für $a=b=c=1$ liefert die Gleichung (3''): $\underline{0=1}$ einen <u>Widerspruch</u>, weshalb das Gleichungssystem für diese Werte <u>nicht</u> lösbar ist.

Das System (ii) ist genau dann lösbar, wenn $c+b-a=0$ gilt.

Es ist nicht lösbar für alle Werte a, b, c mit $c+b-a \neq 0$!

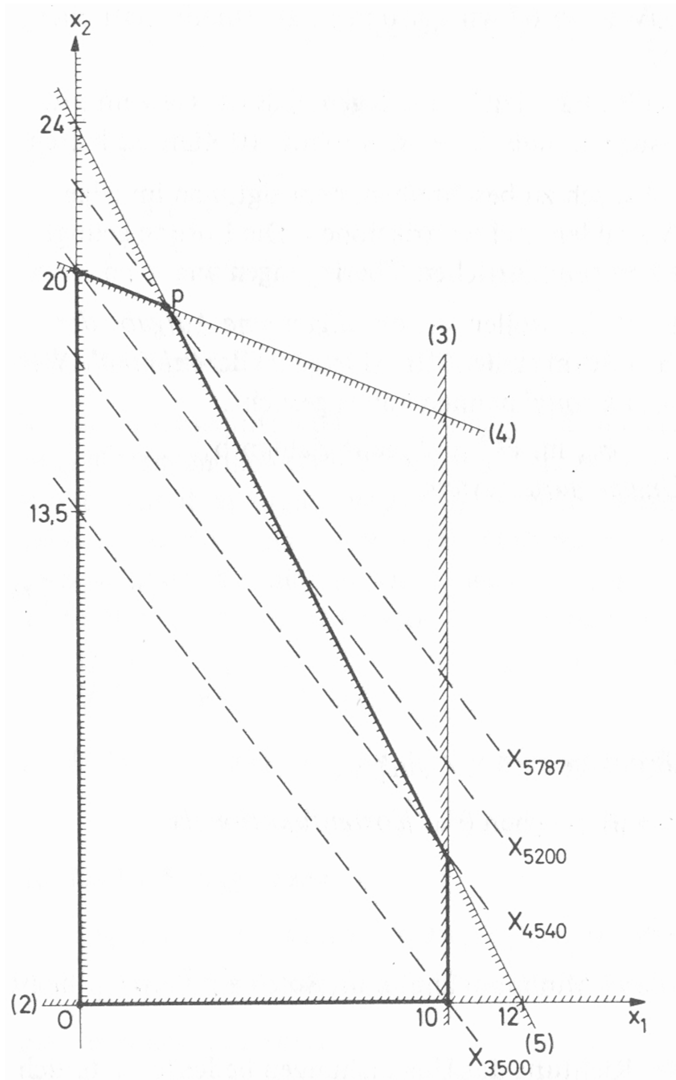
<u>Bemerkung</u>: Alle Punkte $(a;b;c)$, deren Koordinaten die Gleichung $c+b-a=0$ erfüllen, liegen in einer Ebene des 3-dimensionalen Raums

Aufgabe 2. Der optimale Bauer.
Ein Agrarökonom besitzt 20 Hektar Land und einen Stall für 10 Kühe. Er kann im Jahr 2400 Arbeitsstunden aufwenden. Für eine Kuh benötigt er pro Jahr 0,5 Hektar Land und 200 Arbeitsstunden. Der Anbau von 1 Hektar Weizen erfordert pro Jahr 100 Arbeitsstunden. Im Jahr erzielt er einen Gewinn von 350 Euro pro Kuh und von 260 Euro pro Hektar Weizen. Mit wie vielen Kühen und mit wieviel Hektar Weizen läßt sich der höchste Gewinn erzielen?

LÖSUNG:

Wir bezeichnen mit x_1 die Anzahl der Kühe und mit x_2 die angebauten Hektar Weizen. Wir wollen zunächst x_1 und x_2 als reelle Zahlen ansehen, was nicht unrealistisch ist, da man die Kühe schließlich auch wiegen kann.[1]
Für die möglichen Paare (x_1, x_2) gibt es die folgenden Restriktionen:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 && (1)\\ x_2 &\geq 0 && (2)\\ x_1 &\leq 10 && (3)\\ 0,5x_1 + x_2 &\leq 20 && (4)\\ 200x_1 + 100x_2 &\leq 2400. && (5) \end{aligned}$$



In der rechtsstehenden Zeichnung ist die Menge der gültigen Paare dargestellt. Der erzielbare Gewinn ist bestimmt durch den Wert der Funktion

$$f(x_1, x_2) := 350x_1 + 260x_2.$$

Zu jeder Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Menge

$$X_\alpha := \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = \alpha\}$$

der Paare mit gleichem Gewinn, die eine Gerade ist. Lässt man α von 0 aus ansteigen, so ist der Punkt p der letzte gültige Punkt. Dort erzielt der Agrarökonom den maximalen Gewinn. Der Punkt p ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0,5x_1 + x_2 &= 20\\ 200x_1 + 100x_2 &= 2400, \end{aligned}$$

das ist $p = (\frac{8}{3}, \frac{56}{3})$ und somit $f(p) = \frac{17360}{3} = 5786,666\ldots$
Nun stellt sich natürlich die Frage, was einem diese Lösung sagt: Z.B. könnte man sie als zwei ausgewachsene Kühe und ein Kalb auffassen. Andererseits könnte man diese Lösung auch als Startpunkt nehmen, um eine exakte ganzzahlige Lösung zu finden, indem man die hier vorgestellte Methodik variiert.
Für $x_1 = 3$ Kühe ergibt sich mit (5) $x_2 = 18$ also ein Gewinn von $f(3, 18) = 5730$ und
für $x_1 = 2$ Kühe mit (4) $x_2 = 19$ also ein Gewinn von $f(2, 19) = 5640$, bei nur 2300 Sunden Arbeit/Jahr.
Der Bauer kann sich aber auch entscheiden, 50 Stunden im Jahr mehr zu arbeiten, um bei 3 Kühen das verbleibenden halbe Hektar auch noch mit Weizen zu bebauen. Der Gewinn ist dann: $f(3, 18.5) = 5860$, d.h. 50 Stunden höherer Einsatz bedeutet $73,333$ mehr Gewinn. [1]

[1]Wenn Mathematik bzw. Informatik in anderen Gebieten angewendet werden soll, hat man immer das Problem der Modellbildung. Ob dieses Modell wirklich angemessen ist, hängt stark vom Bauer ab. Ein Bauer, der Kühe für einen Schlachthof produziert, ist sicher mit unserer Modellwahl einverstanden. Ein Bauer, der Milchkühe hält sicher nicht, aber vielleicht hilft dennoch der vorgestelle Lösungsweg.