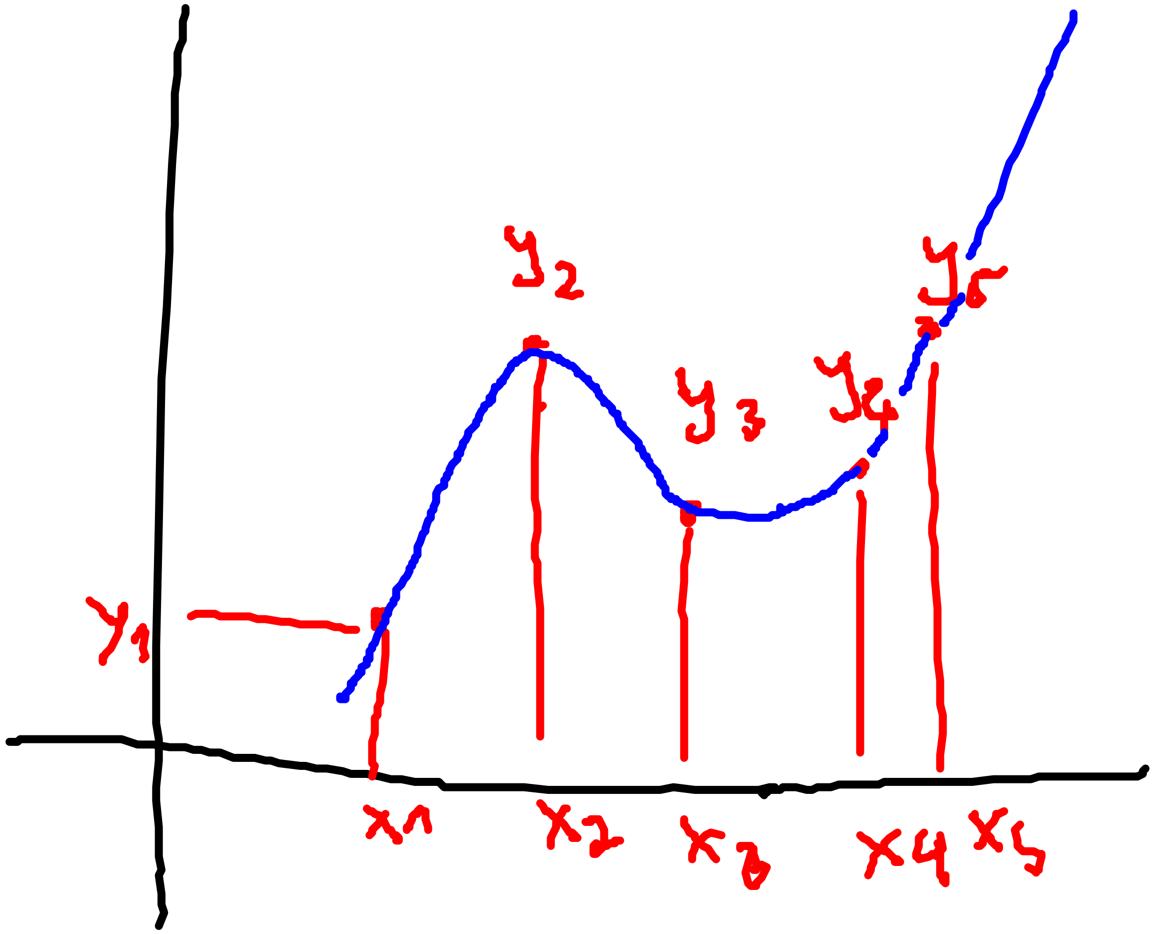
Ziel für Heute: Interpolation / Approximation
(Thema mit Variationen)

gegeben seien n-Werte $y_1, y_2, \dots y_n$
an n-Stellen $x_1, x_2, \dots x_n$



Problem:
lege glatte Kurve
durch Messwerte
Kurve ~ Polynom
niedrigen
Grades

Polynominterpolation:

Sei $\overbrace{x_1 \dots x_n}^{\text{Stützstellen}} \in \mathbb{R}^n$ gegebenen mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$

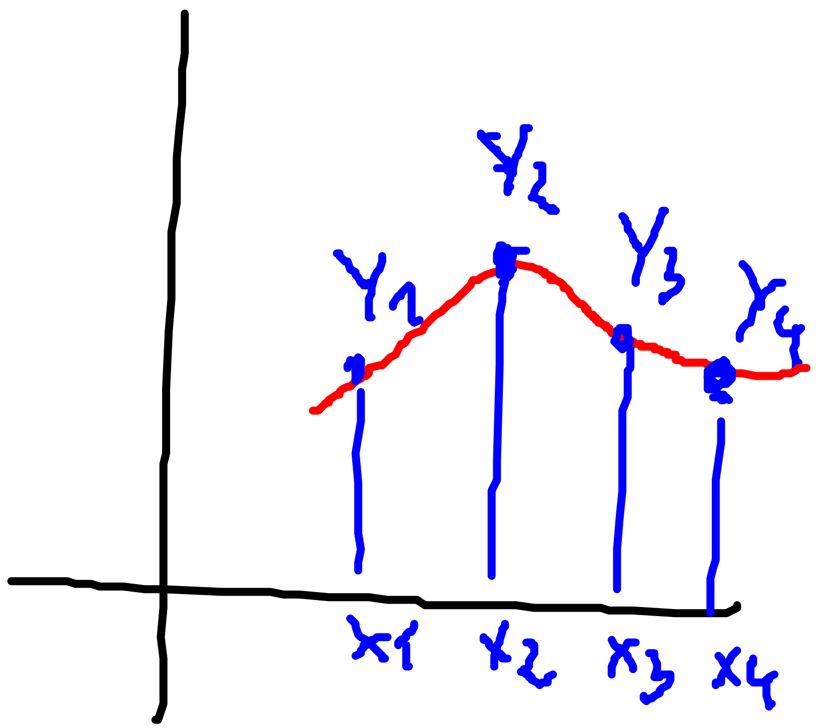
Sei $\underbrace{y_1 \dots y_n}_{\text{Werte}} \in \mathbb{R}$ gegeben

Gesucht Polynom

$p(x)$ vom Grad $n-1$ mit

$p(x_i) = y_i$ für alle

$i = 1, \dots, n$



Gesucht $a_0, a_1, \dots, a_d$ $\quad$ $d = n-1$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d = p(x)$$

mit $p(x_i) = y_i$

Auswertung des Polynoms als Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^d \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Auffinden der a_i: Löse lineares Gl Sys

In dem Fall immer Möglich

Numerisch schlecht konditioniert!

Besserer Ansatz:

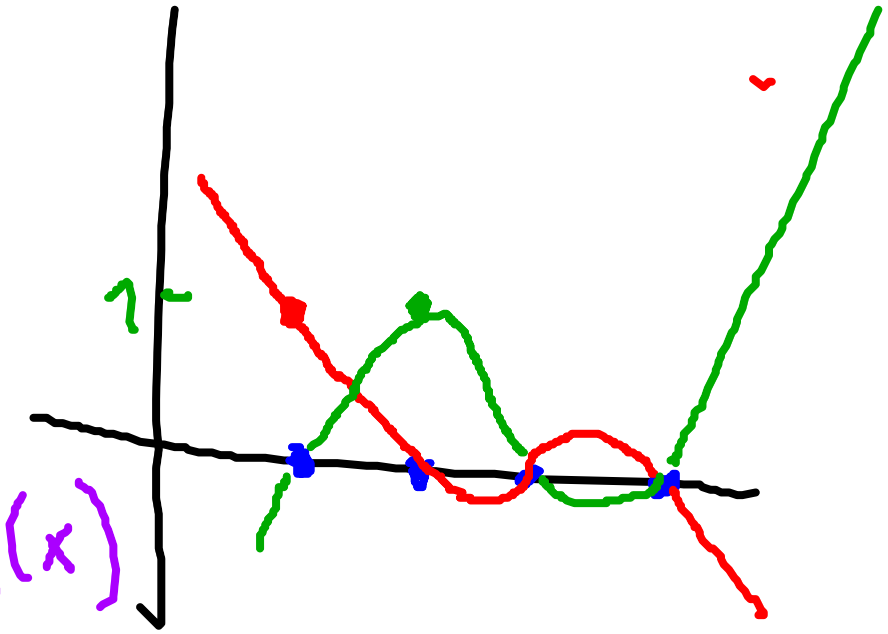
Löse das Problem zuerst für

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = e_i \quad \text{i-te Einheitsvektor.}$$

gesucht Polynome $p_1(x) \ldots p_n(x)$

mit $p_i(x_j) = 0$ für $i \neq j$

$p_i(x_i) = 1$



Kombination der Ergebnisse

$$p(x) = y_1 p_1(x) + y_2 p_2(x) + \ldots + y_n p_n(x)$$

Die $p_i(x)$ lassen sich explizit angeben

Betrachte $q_i(x) = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$

Eigenschaften:

(i) $\text{grad}(q_i(x)) = n-1 = d$

(ii) $q_i(x_j) = 0$ für $i \neq j$

(iii) $q_i(x_i) \neq 0$

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, p_i(x)}$$

gesuchte Polynome $p_i(x) = \dfrac{q_i(x)}{q_i(x_i)}$

Variation 1: Kontrolle über Steigungen

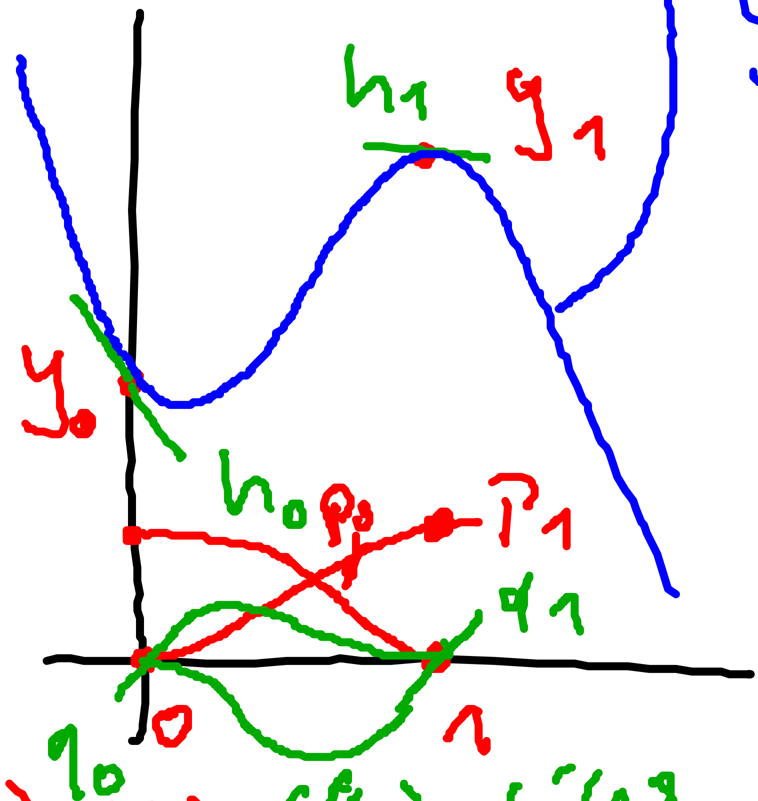
Hermite Interpolation

Beispiel 2-Stützstellen, 2 Steigungen

$p(0) = y_0,\ p(1) = y_1$

$p'(0) = h_0,\ p'(1) = h_1$

$\rightarrow p(x) = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + h_0 q_0(x) + h_1 q_1(x)$



$p_0(x) = (1-x)^2(1+2x)$

$p_1(x) = (3-2x)x^2$

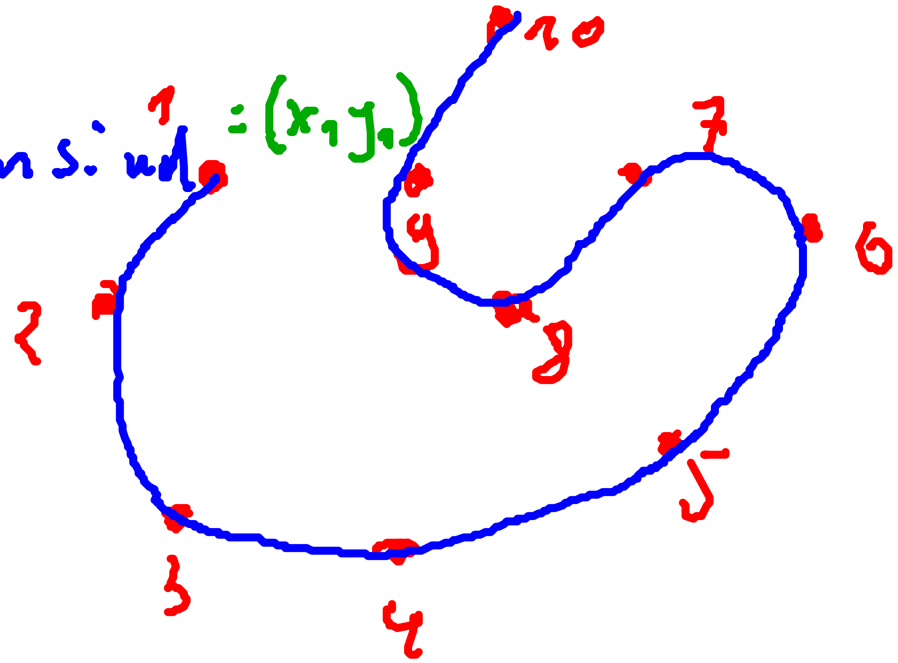
$q_0(x) = x(1-x)^2$

$q_1(x) = x^2(1-x)$

	$f(0)$	$f(1)$	$f'(0)$	$f'(1)$
p_0	1	0	0	0
p_1	0	1	0	0
q_0	0	0	1	0
q_1	0	0	0	1

Variation 2

Problem: Kurven, die keine Funktionen sind



Trick: Zerlege in 2 Funktionen mit Stützstellen $t_1, t_2 \dots t_n$

$$p_x(t_1)=x_1 \qquad p_y(t_1)=y_1$$
$$p_x(t_2)=x_2 \qquad p_y(t_2)=y_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$p_x(t_n)=x_n \qquad p_y(t_n)=y_n$$

oft $t_1=1, t_2=2 \dots t_n=n$

Betrachte Kurve

$$\varphi: [t_1, t_n] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to (p_x(t), p_y(t))$$

Variation 3   Suche nach algebraischen Kurven

Alg Kurve vom Grad d

$$f(x,y) = \sum_{\substack{0<i\le d \\ 0<j\le d \\ i+j\le d}} a_{ij}\, x^i y^j$$

← Polynom in Grad d in zwei Variablen

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=0\}$$

← algebraische Kurve

			festgelegt durch
$d=1$	Geraden	3 Terme	2 Punkte
$d=2$	Kegelschnitte	6 Terme	5 Punkte
$d=3$	Kubiken	10 Terme	9 Punkte
$d=4$	Quartiken	15 Terme	14 Punkte

Ansatz (Beispiel Kegelschnitt)

gesucht sind a, b, c, d, e, f

$$a x_i^2 + b y_i^2 + c x_i y_i + d x_i + e y_i + \cancel{f}\, 1 = 0$$

ein paar degenerierte Fälle werden ausgeschlossen

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 \\ & & \vdots & & \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 y_5 & x_5 & y_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kurve finden $\Rightarrow$ Gleichung lösen