Problem: Löse eine Gleichung 3. Grades

„Lösen" $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

$\rightsquigarrow$ Gib ein Lösung an die ähnlich wie die p,q Formel ist

$x^2 + px + q = 0$

$\rightsquigarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

+, −, ·, ÷
Potenz
+ Radizieren

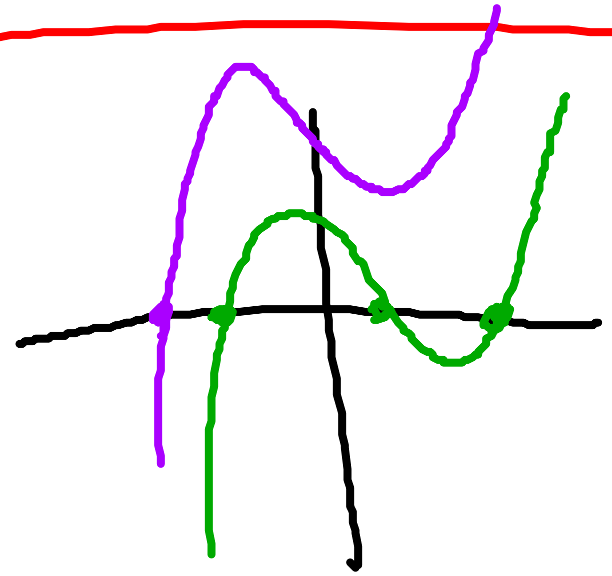
Kubische Gleichungen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$\downarrow \quad x = z - \frac{a}{3}$$

$$z^3 + pz + q = 0$$

$$(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) =$$
$$z^3 - z^2(z_0 + z_1 + z_2) + \ldots$$



$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Bsp: $x^3 - 24x - 72 = 0$

$$x = \sqrt[3]{36 + \sqrt{36^2 + (-8)^3}} + \sqrt[3]{36 - \sqrt{36^2 + (-8)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{36 + \sqrt{784}} + \sqrt[3]{36 - \sqrt{784}}$$

$$= \sqrt[3]{36 + 28} + \sqrt[3]{36 - 28}$$

$$= \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{8}$$

$$= 4 + 2 = 6$$

Bsp 2 $\quad x^3 - 15x - 4$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{2^2-5^3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{2^2-5^3}}$$

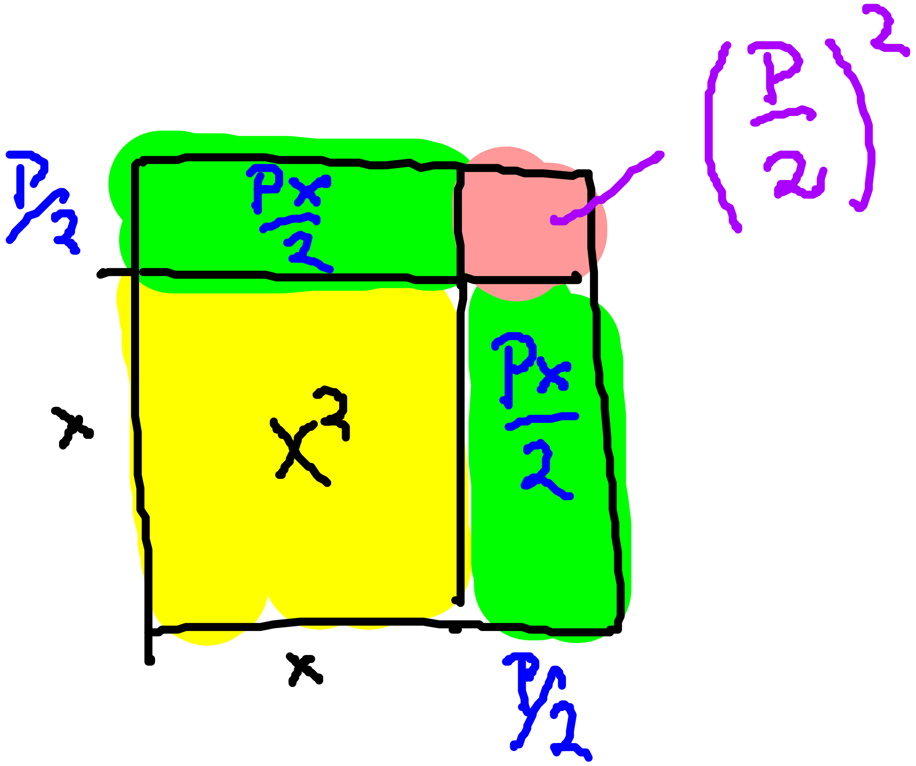
$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

$$x = (2+i) + (2-i)$$

$$x = 4$$

Lösungen quadratischer Gleichungen: $x^2+px+q=0$

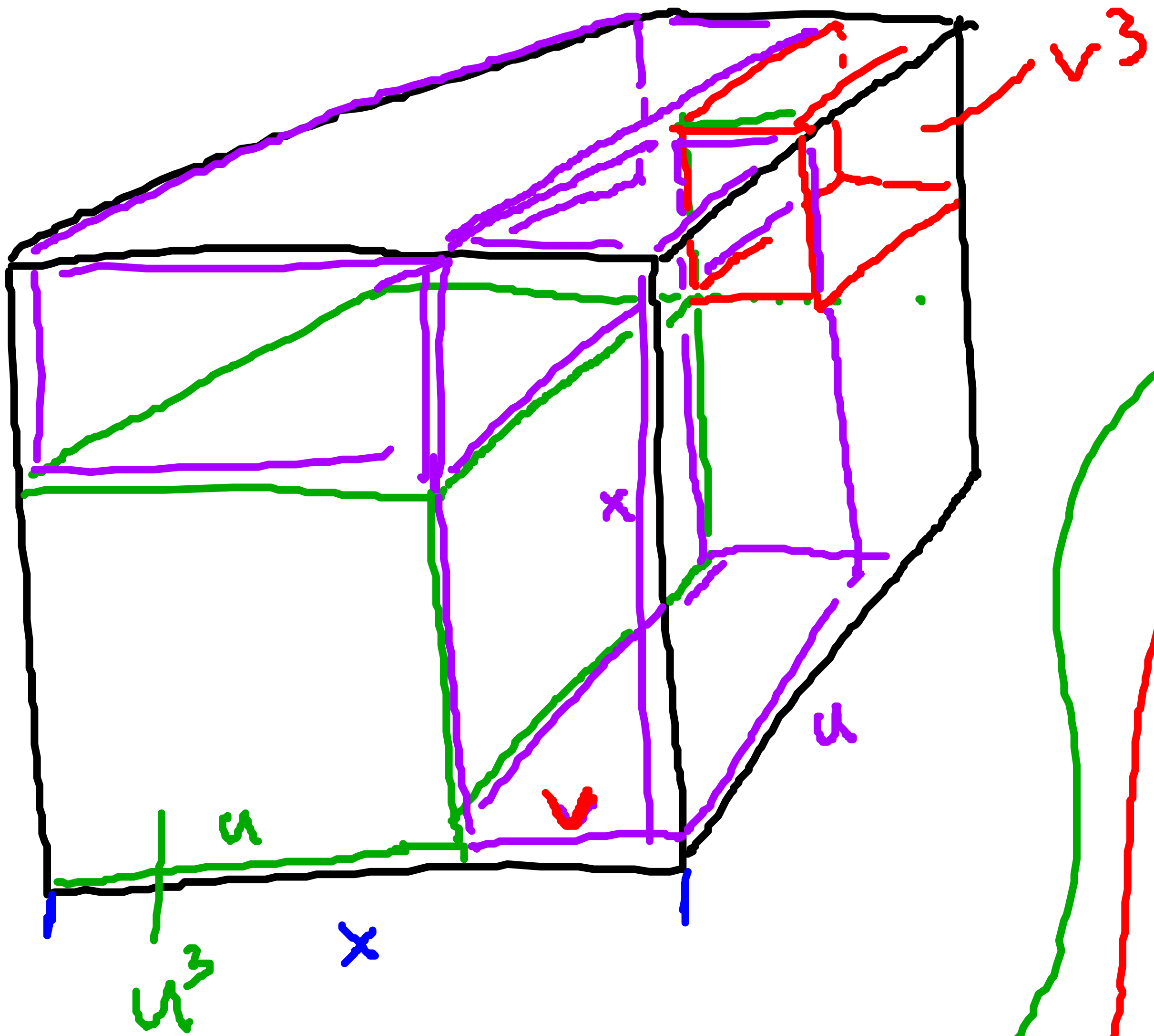


$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \underbrace{x^2+px}_{-q} + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$= -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x+\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$



$$\underbrace{x^3} + \underbrace{px} + \underbrace{q} = 0$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{\dots} + \sqrt[3]{\dots}$$

$$x^3 = u^3 + v^3 + \text{irgendwas}$$

$$\underbrace{x^3} = \underbrace{u^3 + v^3} + \underbrace{3xvu}$$

$$x^3 = -q - px$$

$$3uv = -p \qquad \left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

$$u^3 + v^3 = -q \xRightarrow{\cdot u^3} u^6 + \overbrace{v^3 u^3} + q u^3 = 0$$

$$(u^3)^2 + q u^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

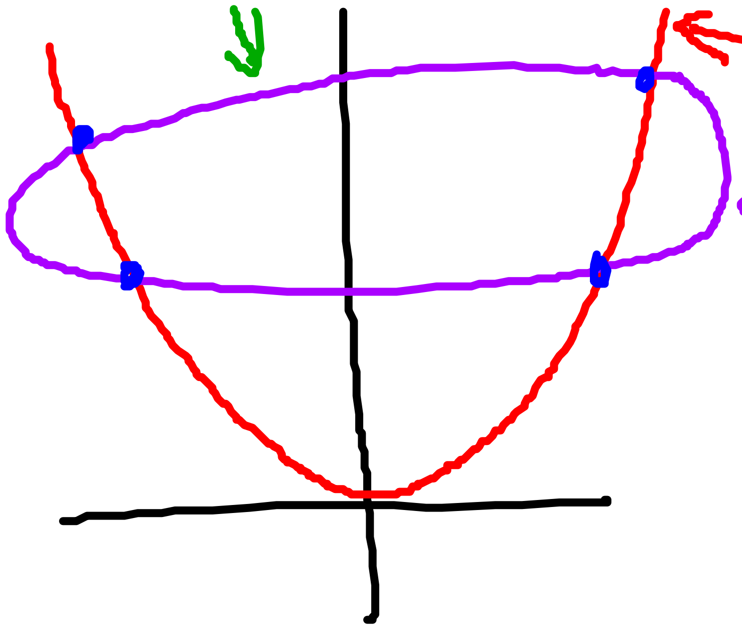
Polynome 4ten Grades:

Gesucht: Lösung von $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$x = z - \frac{a}{4} \Rightarrow z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

↳ Übersetzung in ein geometrisches Problem:

geht als Kreis | Schneide Parabel mit Achsenparalleler Ellipse



$y = x^2$

$$\delta(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \gamma = 0$$

$$\delta x^2 - 2\delta\alpha x + \delta\alpha^2 + x^4 - 2\beta x^2 + \beta^2 - \gamma = 0$$

$$x^4 + x^2\underbrace{(\delta - 2\beta)}_{p} + x\underbrace{(-2\delta\alpha)}_{q} + \underbrace{\delta\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}_{r} = 0$$

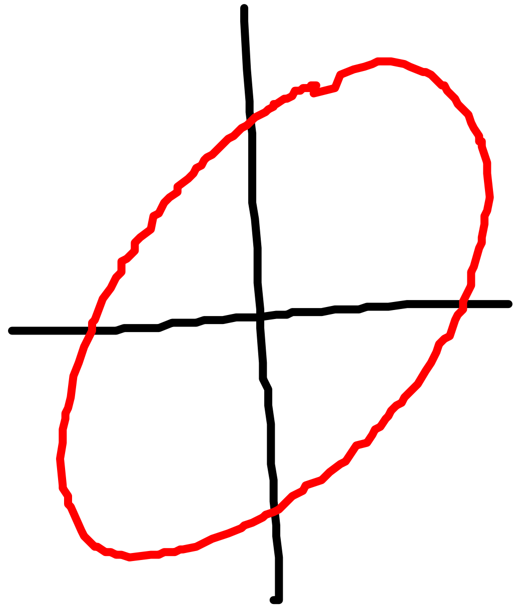
$$x^4 + \cancel{x^2}(1 - 2\beta) + x(-2\alpha) + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma = 0$$

Es gilt sogar $\delta = 1$

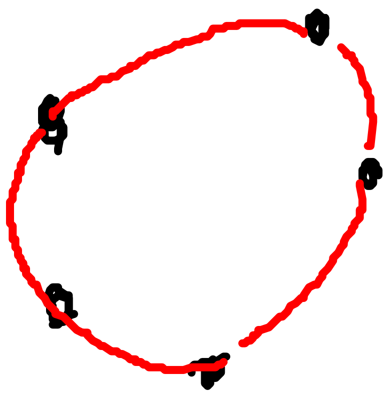
Problem: Wie schneidet man Kegelschnitte (Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln)

Nullstellen einer quadratischen Glg. in 2 Variablen

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

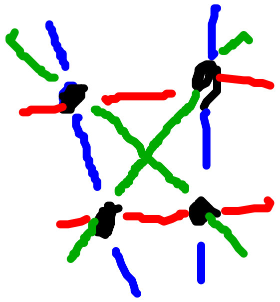


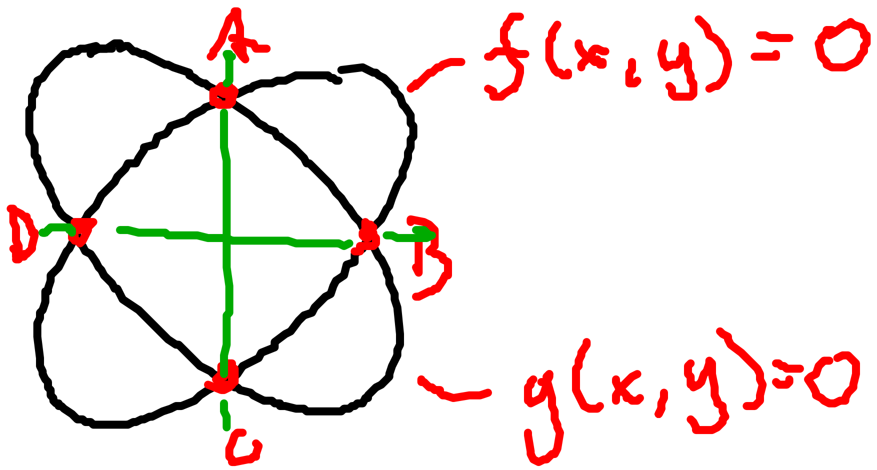
Fact 5 Punkte legen einen KS eindeutig fest



Spezialfall

KS degeneriert zu zwei Geraden





Betrachte:

$$\underbrace{f(x,y)+\mu\cdot g(x,y)}_{h(x,y)}=0$$

• $h(x,y)=0$ ist KS durch A, B, C, D

Lösungsstrategie:

1. Suche μ so daß $h(x,y)$ in zwei Geraden zerfällt
   (Löse Gl. 3. Grades)
2. Für dieses μ zerlege $h(x,y)$ in die Geraden
   (Löse quadr. Gleichung)
3. Schneide jede dieser Geraden mit $f(x,y)=0$
   (quadr. Gl.)