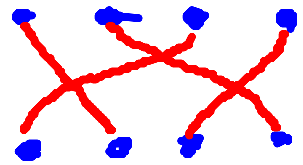
Aus der Vorlesung:

Permutationen: $E_n = \{1, \dots, n\}$

bijektive Abb. $\pi : E_n \to E_n$

S_n = Menge aller Permutationen mit n Elementen

$|S_n| = n!$ Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim$ 

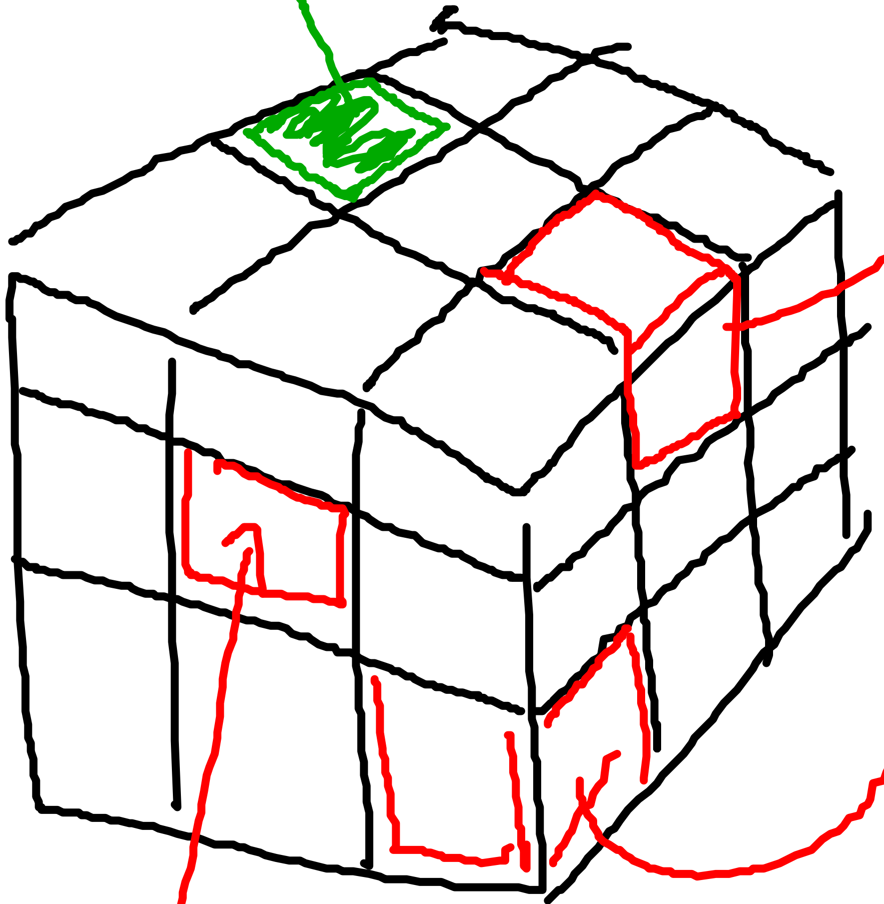
Jede Permutation is Produkt von Transpositionen (= Vertauschungen = 2-Zykel)

Bsp $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (34)(12)(23)$

Parität $= (-1)^{\#\text{Transpositionen}}$ ist wohldefiniert.

Rubiks Cube

Plättchen → Plättchen
54 Stück

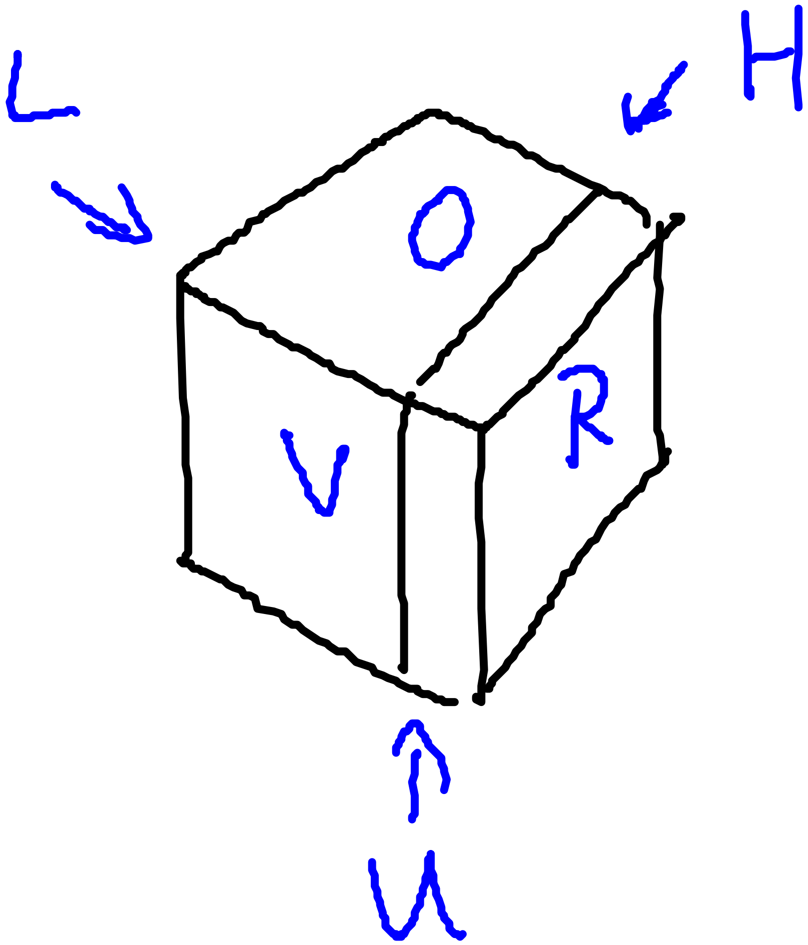


Kante
12 Stück
2 Positionen

Ecke
8 Stück
3 Positionen

Mitte
bleiben Fest

Aktion: Drehen einer Außenseite



$V \hat{=}$ drehe V um $90°$ gegen Uhrzeigersinn

Zug: $VOVVVOOOV$

Leserichtung

$= VOV^3O^3V$

$= VOV^{-1}O^{-1}V$ | $V^{-1} = V^3$

Vermischen des Würfels: Untergruppe der S_{54}

$V \in S_{54}$

$\mathcal{R}$ Rubiksgruppe ist die von V, H, O, U, R, L erzeugte UG der S_{54}

$\underbrace{\text{Verdrehter Würfel}}_{\pi}$ ist auch $\in S_{54}$

Aufgabe: Stelle π^{-1} als Verknüpfung von L, R, V, H, O, U dar.

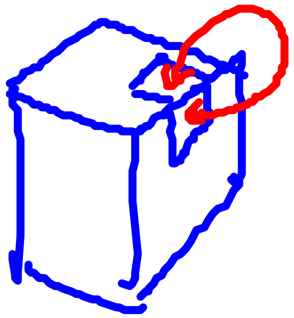
Wieviel physikalische Möglichkeiten gibt es

$$\underbrace{8!}_{\text{Position der Ecken}} \cdot \underbrace{3^8}_{\text{Lage der Ecken}} \cdot \underbrace{12!}_{\text{Position der Kanten}} \cdot \underbrace{2^{12}}_{\text{Lage der Kanten}}$$

$= 5190240393878272000$

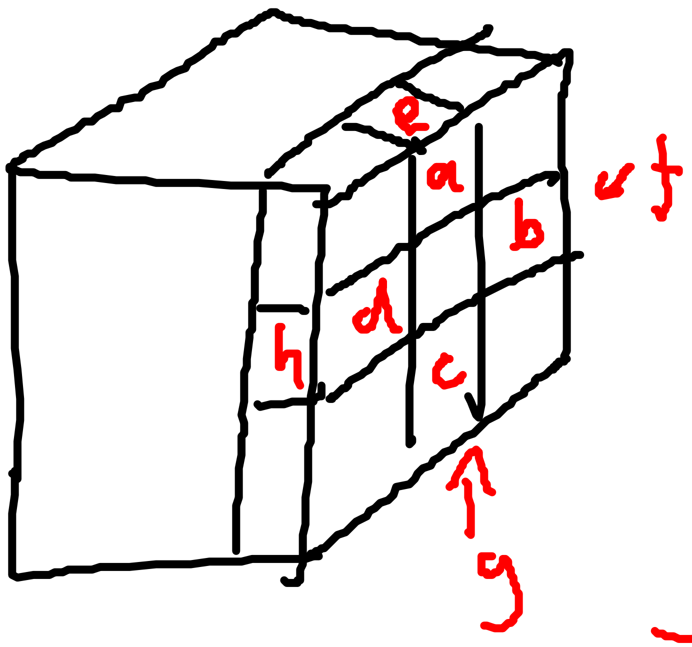
Kommen die alle erreicht werden?

Antwort: NEIN. Es ist z.B. nicht möglich eine einzelne Kante um 180° zu drehen



Bew

ein Elementarzug:



$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f & g & h \\ f & g & h & e \end{pmatrix} = \pi_E$$

$$\mathrm{sign}(\pi_E) = 1$$

$\Rightarrow$ jeder Zug hat sign $= 1$

Untergruppen von R

$K \subseteq R$ UG die Kanten in Position und Lage fest lößt

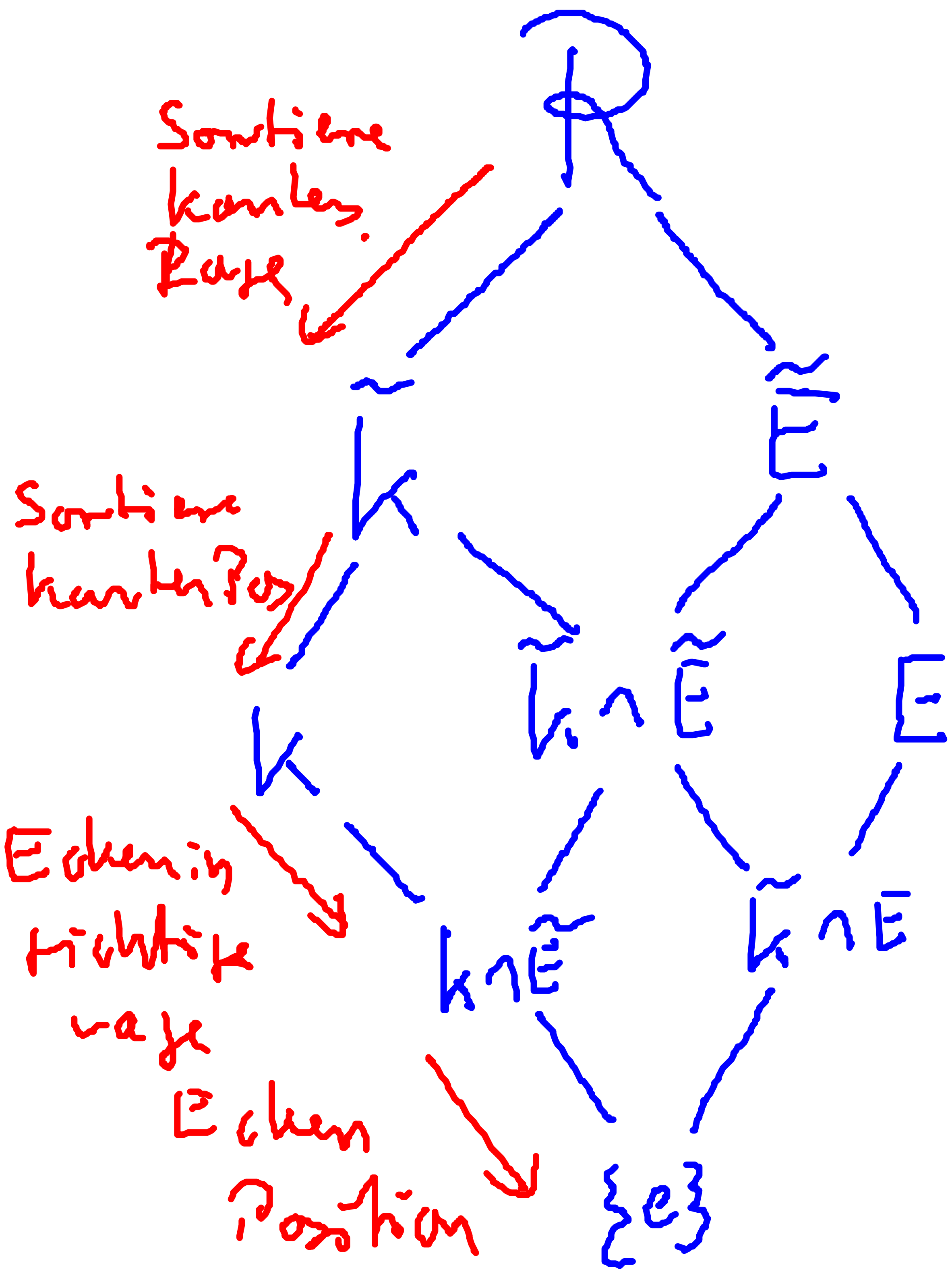
$\cap\!\mid$

$\tilde{K} \subseteq R$ UG die die Kanten Lage. fest lößt.

$E \subseteq R$ UG die Ecken in Pos und Lage fest läßt

$\cap\!\mid$

$\tilde{E} \subseteq R$ UG die Ecken in Lage fest läßt



$\tilde{K}$
$\tilde{E}$
Sortiere Kanten Lage
K
$\tilde{K} \cap \tilde{E}$
E
Sortiere KantenPos
$K \cap \tilde{E}$
$\tilde{K} \cap E$
Ecken in richtige Lage
Ecken Position
$\{e\}$

Beobachtung: R ist endlich

$\Rightarrow$ für jeden Zug $g \in R$ gibt es ein

$i \in \mathbb{N}$ mit $g^i = e$

$$(VOV^{-1}O^{-1})^6 = e$$

Beobachtung bei $(VOV^{-1}O^{-1})^3$

sind die Kante unverändert

Konjugation:

Angenommen ein Zyklus (i,j,k) ist durchführbar.
Dann auch aber (a,b,c)

$$\underbrace{(a\,i)(b\,j)(c\,k)}_{A} \circ \underset{X}{(i\,j\,k)} \underbrace{(A^{-1})}_{A^{-1}}$$