Überblick

Determinanten

→ Charakterisierung über 3 Eigenschaften

- normiert $\det(E_n)=1$
- multilinear linear in jeder Spalte
- antikommutativ Spaltenvertauschung ändert VZ

⇒ Existenz und Eindeutigkeit

→ Einfache Folgerungen:

- $\det(a_1,\dots,a_i,\dots,a_i,\dots,a_n)=0$
- $\det\left(a_1,\dots,a_{n-1},\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i a_i\right)=0$

→ Allgemeine Formel für det(A), $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \left(\operatorname{sign}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i} \right)$$

⇝ n! Summanden

→ Regel von Sarrus NUR in $\mathbb{K}^{3 \times 3}$!

→ weitere Rechenregeln für Determinanten

- $\det(A) = \det(A^T)$

  ⇒ Spalten ↔ Zeilen

- Produktsatz: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = 1/\det(A)$
- ...

→ $GL(n, \mathbb{K})$ Gruppe aller invertierbaren (n×n)-Matrizen über Körper $\mathbb{K}$

→ Berechnungsformeln für Determinanten

1. Summe über n! Produkte
2. Spezialfälle

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{A} & * \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 \\ * & \boxed{B} \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

3. Gauß
4. Spaltenentwicklung / Zeilenentwicklung

→ Determinanten und LGS

Cramer'sche Regel

→ Anwendungen von Determinanten
- Invertierbarkeit
- Volumenberechnungen
- ...
- Eigenwerte / Eigenvektoren

Eigenwerte/Eigenvektoren $Av = \lambda v,\ \lambda \in K,\ v \neq 0$

- charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$
- Satz: $\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist Eigenwert

Matrizen und LGS A und $Ax=b$	Determinanten $\lvert A\rvert := \det(A)$
$\lambda\cdot A \leftrightarrow \lambda\cdot a_{ij}$ für <u>jeden</u> Matrixeintrag	$\lambda\cdot\lvert A\rvert \leftrightarrow \lambda\cdot$ <u>einer</u> Spalte <u>oder</u> $\lambda\cdot$ <u>einer</u> Zeile
(am besten) NUR Zeilenumformungen	Zeilenumformungen und Spaltenumformungen
Zeilenvertauschung ✓ $Ax=b \Leftrightarrow A'x=b'$ ✓	Zeilenvertauschung ϟ $\lvert A\rvert = -\lvert A'\rvert$
Zeile k $\leftrightarrow \lambda\cdot$ Zeile k, $\lambda\neq 0$ ✓ $Ax=b \Leftrightarrow A'x=b'$ ✓	Zeile k $\leftrightarrow \lambda\cdot$ Zeile k, $\lambda\neq 0$ ϟ $\lvert A\rvert = 1/\lambda\cdot\lvert A'\rvert$
Zeile k $\leftrightarrow$ Zeile k $+\lambda\cdot$ Zeile l ✓ $Ax=b \Leftrightarrow A'x=b'$ ✓	Zeile k $\leftrightarrow$ Zeile k $+\lambda\cdot$ Zeile l ✓ $\lvert A\rvert = \lvert A'\rvert$

Eigenwerte / Eigenvektoren

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $v \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists v \neq 0 : A \cdot v = \lambda \cdot v$

$\Leftrightarrow \exists v \neq 0 : A \cdot v - \lambda \cdot v = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \exists v \neq 0 : (A - \lambda E_n) \cdot v = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ Das homogene LGS $(A - \lambda E_n) \cdot v = 0$ hat eine nicht-triviale Lösung $v \neq 0$

$\Leftrightarrow$ Die Spaltenvektoren von $A - \lambda E_n$ sind linear abhängig

$\Leftrightarrow$ $A-\lambda E_n$ ist nicht invertierbar

$\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda E_n) = 0$

1. Schritt: Charakteristisches Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda^{+} & 2^{-} & -1^{+} \\ 0^{-} & 3-\lambda^{+} & 0^{-} \\ -1^{+} & 2^{-} & 1-\lambda^{+} \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach 2. Zeile

$$\stackrel{}{=} (-1)\cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$+ 1 \cdot (3-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$- 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= (3-\lambda)\,(1-2\lambda+\lambda^2-1)$$

$$= (3-\lambda)\,(\lambda^2-2\lambda)$$

$$= (3-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-2)$$

$$= -\lambda\,(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)$$

2. Schritt: Nullstellen von χ_A

$$\chi_A(\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\lambda \cdot (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 3$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3$$

sind EW von A

3. Schritt: Bestimmung der zug. EV

$\underline{\lambda_1 = 0}$ $\quad (A - 0 \cdot E_3) \cdot v = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ 1/3 \cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{III} + \mathrm{I} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 1 \cdot v_{11} + 2 v_{12} - 1 \cdot v_{13} = 0 \\ \qquad\qquad v_{12} \qquad\qquad = 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} v_{13} = \mu \in \mathbb{R} \\ v_{12} = 0 \\ v_{11} = v_{13} \end{array} \Rightarrow v_1 = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

<u>Beachte:</u> Die EV zum EW $\lambda = 0$ liegen im Kern (A) $\quad Av = \lambda v = 0$

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $(A - 2 \cdot E_3) \cdot v = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1-2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3-2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1-2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_2 = \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\underline{\lambda_3 = 3:}$ $\quad (A - 3E_3) \cdot v = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3-3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1-3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_3 = \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mu_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zusammenfassung / Diagonalisierbarkeit

Die Matrix A besitzt 3 EW
Die zugehörigen EV sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

Dadurch wird A diagonalisierbar

Für $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ def. $T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
T^{-1}\cdot A\cdot T &= T^{-1} A \cdot \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \\
&= T^{-1}\cdot \begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & Av_2 & Av_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \\
&= T^{-1}\cdot \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \lambda_3 v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & | \\ T^{-1}\lambda_1 v_1 & T^{-1}\lambda_2 v_2 & T^{-1}\lambda_3 v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 \cdot T^{-1} v_1, & \lambda_2 T^{-1} v_2, & \lambda_3 T^{-1} v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 \cdot e_1 & \lambda_2 \cdot e_2 & \lambda_3 \cdot e_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \quad T^{-1} \cdot A \cdot T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = T \cdot \underbrace{\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}_{D} \cdot T^{-1}$$

<u>Bsp:</u> $A^{27} = T \cdot \left(\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\right)^{27} \cdot T^{-1}$

Einfache Darstellung einer Abbildung nach geeignetem Basiswechsel $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$

Konkret für Matrix A aus Aufg. P100

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad T^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\boxed{\text{Aufgabe P100}}$

Aufgabe P100.1

Geg.: Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ges.: Eigenwerte, jew. zug. Eigenvektoren