Überblick

→ Drei "Denkarten" für $Ax = b$

- Ebene Matrix-Vektor-Gleichung
- Ebene Linearkombination / Span
- Ebene Lineare Funktion / Bild

→ Homogene LGS $A \cdot x = 0$

→ Zusammenhang

inhomogenes LGS ↔ zug. homogenes LGS

$A \cdot x = b \quad \leftrightarrow \quad A \cdot x = 0$

$\text{Lös}_{(A,b)} : x_0 + \text{Kern}(f_A), \quad f_A(x_0) = b$

$\rightarrow$ Rang einer Matrix

Spaltenrang = Zeilenrang

$\rightarrow$ Kriterien für eindeutige Lösbarkeit von $M \cdot x = b$ mit M $(n \times n)$-Matrix

$\rightarrow$ Inverse A^{-1} einer $(n \times n)$-Matrix A

$(A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n)$

$\rightarrow$ Berechnung von A^{-1}

$\rightarrow$ Lösen von LGS $A \cdot x = b$ mithilfe von A^{-1}

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b$$

5.3 Rechnen mit Matrizen

→ Definition von

$$\underbrace{(n\times m)+(n\times m)}_{(n\times m)}\! \overset{A+B}{} ,\quad \underbrace{(n\times m)}_{(m\times n)}\!\overset{A^T}{} ,\quad \underbrace{(n\times m)\cdot(m\times k)}_{(n\times k)}\!\overset{A\cdot B}{} ,\quad \overset{E_n}{(n\times n)} ,\quad \underbrace{(n\times n)}_{(n\times n)}\!\overset{A^{-1}}{}$$

→ Rechenregeln für Matrizen

im Allg.: $A\cdot B \neq B\cdot A$

"Ansichten" von $\underset{(n\times m)}{A}\cdot x = b$

$$A\cdot x = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1\begin{pmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{pmatrix} + \ldots + x_m\begin{pmatrix} | \\ a_m \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Lösbarkeit von $A \cdot x = b$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad b \in \mathbb{R}^{n}, \quad x \in \mathbb{R}^{m}$$

$A \cdot x = b$ ist lösbar

(mindestens eine Lösung)

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$$

Aufgabe Z 89

Geg: LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

Ges: Maximale Anzahl von Additionen/Subtr. und Multiplikationen / Divisionen bei Lösung mit Gauß-Algorithmus (keine Berücksichtigung von evtl. nötigen Zeilenvert.)

Annahme: $Ax = b$ ist eindeutig lösbar ($\leadsto$ max. Aufwand)

Vorwärtsschritt für $(A|b)$ j-ter Schritt

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & \cdots & & \cdots & & a_{1n} & \beta_1 \\
0 & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & a_{jj} & a_{j,j+1} & \cdots & a_{jn} & \beta_j \\
\vdots & \vdots & a_{j+1,j} & a^*_{j+1,j+1} & \cdots & a^*_{j+1,n} & \beta^*_{j+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
0 & \cdots\ 0 & a_{nj} & a^*_{n,j+1} & \cdots & a^*_{nn} & \beta^*_n
\end{array}\right)$$

Für jede Zeile k mit $j+1 \leq k \leq n$

ersetze

Zeile $k \leftrightarrow$ Zeile $k - \lambda_k \cdot$ Zeile j mit $\lambda_k := \dfrac{a_{kj}}{a_{jj}}$

Somit zu berechnen (β- Einträge)

(Zeile k, $j+1 \le k \le n$ / Spalte ℓ, $j+1 \le \ell \le n$;)

$\rightarrow \lambda_k = \frac{a_{kj}}{a_{jj}}$ $\quad j+1 \le k \le n \quad \rightsquigarrow (n-j)$ Mult/Div.

$\rightarrow a^*_{k\ell} = a_{k\ell} - \lambda_k \cdot a_{kj}$ $\quad \left.\begin{matrix} j+1 \le k \le n \\ j+1 \le \ell \le n \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow$ $(n-j)^2$ Mult/Div, $(n-j)^2$ Add/Sub

$\beta^*_k = \beta_k - \lambda_k \cdot \beta_j \quad j+1 \le k \le n \rightsquigarrow$ $(n-j)$ Mult/Div., $(n-j)$ Add./Sub.

Insgesamt:

Mult/Div: $$\sum_{j=1}^{n-1}\left[(n-j)^2+2(n-j)\right]$$

$$\overset{n-j=k}{=} \sum_{k=1}^{n-1}\left[k^2+2k\right]$$

$$= 2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$\overset{\text{Formel-sammlung}}{=} 2\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$

Add./Sub.:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left[(n-j)^2 + (n-j) \right]$$

$$\overset{n-j=k}{=} \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{3} n$$

Rückwärtsschritt j-ter Schritt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccccc|c}
a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta_1^{*} \\
0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \\
\vdots & & \ddots & a_{j-1,j-1} & a_{j-1,j} & \vdots & \vdots & & & \vdots & \beta_{j-1}^{*} \\
\vdots & & & 0 & \cancel{a_{j,j}}\ 1 & 0 & \vdots & & & \vdots & \cancel{\beta_j} \\
\hline
\vdots & & & & 0 & 1 & 0 & & & \vdots & x_{j+1} \\
\vdots & & & & & 0 & \ddots & \ddots & & 0 & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & x_n
\end{array}\right)$$

Für Zeile j: $x_j = \frac{\beta_j}{a_{jj}}$ $\rightsquigarrow$ 1 Mult/Div.

Für jede Zeile k mit $1 \leq k \leq j-1$

berechne $\beta_k^* = \beta_k - a_{kj} x_j \rightsquigarrow$ $(j-1)$ Mult/Div.
$(j-1)$ Add./Sub.

Insgesamt:

<u>Mult/Div:</u> $\sum_{j=1}^{n} (j-1)+1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

<u>Add./Sub.:</u> $\sum_{j=1}^{n} (j-1) \overset{j-1=k}{=\!=} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

Gesamtbilanz

Mult. / Div:

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$$

Add. / Subt.:

$$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

$$\Rightarrow O(n^3)$$

Aufgabe:

Geg: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Ges: A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot \mathrm{II} \\ \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot \mathrm{III} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} - \mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ 3 \cdot \mathrm{III} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -5/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \underline{\mathrm{I} - 3\cdot\mathrm{III}} \\ \underline{\mathrm{II} - 4/3\cdot\mathrm{III}} \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -5/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \underline{\mathrm{I} - 2\cdot\mathrm{II}} \\ \underline{\mathrm{II}} \\ \underline{\mathrm{III}} \end{array}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -5/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Aufgabe P88}}$

Geg: (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$

mit $\det(A) = ad - bc \neq 0$

Beh: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bew: Nachrechnen $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E_n$

Aufgabe P 88.2

Ges: Alle selbstinversen Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$

d.h. alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $A = A^{-1}$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad a = \frac{d}{ad-bc} \qquad \Big\| \qquad (4) \quad d = \frac{a}{ad-bc}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2) \quad b = \frac{-b}{ad-bc} \Leftrightarrow b(ad-bc+1) = 0$$

$$(3) \quad c = \frac{-c}{ad-bc} \Leftrightarrow c(ad-bc+1) = 0$$

$\left.\right\} \rightsquigarrow$ Fall-untersch.

$\rightarrow$ <u>Fallunterscheidung</u>

Fall I: $ad - bc = -1$

$\Rightarrow$ (mit (1), (4)): $a = -d \wedge d = -a$

$\Rightarrow a(-a) - bc = -1$

$\Rightarrow bc = 1 - a^2$

Fall I.1: $b = 0 \vee c = 0$

$\Rightarrow a^2 = 1$

$\Rightarrow A \in M_0 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a = \pm 1 \\ b, c \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Fall I.2: $b \neq 0 \wedge c \neq 0 \rightsquigarrow c = \frac{1-a^2}{b}$

$\Rightarrow A \in M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$

Fall II: $ad - bc \neq 1$

$$\Rightarrow A \in M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a = \pm 1 \wedge d = \pm 1 \right\}$$

$$\Rightarrow A = A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A \in M_0 \cup M_1 \cup M_2$$