Überblick

Einschub: Lineare Abbildungen als Transformationen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

→ Spalten der Matrix: Bilder der Einheitsvektoren

→ Drehung um Nullpunkt um Winkel α | $f = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

→ Skalierung um den Nullpunkt | $f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

→ Drehstreckung | $f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

→ Scherung entlang x-Achse | $f = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$

→ Spiegelung an x-Achse | $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

→ Spiegelung an beliebiger Achse | $f = D_\alpha \cdot S \cdot D_{-\alpha}$

→ Matrizenmultiplikation

→ Translation | keine lineare Abbildung

→ "Trick" Translation als Lineare Abbildung | $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

→ Übertragung auf lin. Abb. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ | $f = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

→ Drehung um einen beliebigen Punkt | $f = T_v \cdot D_\alpha \cdot T_{-v}$

5.2 Lineare Gleichungssysteme

→ keine Lösung
genau eine Lösung
unendlich viele Lösungen

→ 3 elementare Zeilenoperationen

→ Gauß-Algorithmus

Aufgabe 82. Rundungs-Probleme.
Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystem $Ax = b_\varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^4$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 10 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_\varepsilon = \begin{pmatrix} 15+\varepsilon \\ 15+\varepsilon \\ 26+\varepsilon \\ 15+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Was fällt auf, wenn sie die Fälle $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und $\varepsilon = 1$ betrachten?

<u>LÖSUNG:</u>

Um das Gleichungssystem zu lösen, verwenden wir den Gauß-Algorithmus. Dabei bringen wir die Matrix $(A|b_\varepsilon)$ mittels geeigneter Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform.

$$(A|b_\varepsilon) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 10 & 5 & -1 & 15+\varepsilon \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 15+\varepsilon \\ 4 & 5 & 10 & 7 & 26+\varepsilon \\ 10 & 1 & 4 & 0 & 15+\varepsilon \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{(Elimination von } x_1) \\ (-4)\cdot \mathrm{I} + \mathrm{III} \\ (-10)\cdot \mathrm{I} + \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 10 & 5 & -1 & 15+\varepsilon \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 15+\varepsilon \\ 0 & -35 & -10 & 11 & -34-3\varepsilon \\ 0 & -99 & -46 & 10 & -135-9\varepsilon \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{(Elimination von } x_2) \\ (-35)\cdot \mathrm{II} + \mathrm{III} \\ (-99)\cdot \mathrm{II} + \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 10 & 5 & -1 & 15+\varepsilon \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 15+\varepsilon \\ 0 & 0 & -255 & -304 & -559-38\,\varepsilon \\ 0 & 0 & -739 & -881 & -1620-108\,\varepsilon \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{(Elimination von } x_3) \\ (-\frac{739}{255})\cdot \mathrm{III} + \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 10 & 5 & -1 & 15+\varepsilon \\ 0 & -1 & 7 & 9 & 15+\varepsilon \\ 0 & 0 & -255 & -304 & -559-38\,\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{255} & \frac{1}{255}+\frac{542}{255}\,\varepsilon \end{array}\right)$$

Rückwärtiges Auflösen: Mit $x_4 = 1 + 542\,\varepsilon$
$\Rightarrow x_3 = [-559 - 38\,\varepsilon + 304(1 + 542\,\varepsilon)]/(-255) = 1 - 646\,\varepsilon$
$\Rightarrow x_2 = -15 - \varepsilon + 7(1 - 646\,\varepsilon) + 8(1 + 542\,\varepsilon) = 1 + 355\,\varepsilon$
$\Rightarrow x_1 = 15 + \varepsilon - 10(1 + 355\,\varepsilon) - 5(1 - 646\,\varepsilon) + 1 + 542\,\varepsilon = 1 + 223\,\varepsilon$

also die Lösung $x_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+223\,\varepsilon \\ 1+355\,\varepsilon \\ 1-646\,\varepsilon \\ 1+542\,\varepsilon \end{pmatrix}$ und damit $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $x_{0.1} = \begin{pmatrix} 23.3 \\ 36.5 \\ -63.6 \\ 55.2 \end{pmatrix}$ bzw. $x_1 = \begin{pmatrix} 224 \\ 356 \\ -645 \\ 543 \end{pmatrix}$.

Es fallen nun gleich zwei Sachen auf:
1.) Die Lösung ist sehr stark von ε und damit von der rechten Seite des Gleichungssystems abhängig. Das kann zu erheblichen Problemen führen, wenn z.B. die rechte Seite Meßdaten (und damit ungenaue Daten) sind.
2.) Im unserem letzten Rechen-Schritt taucht $\frac{1}{255} \approx 0.0039$ auf. Bei Rechnen mit zwei Nachkommastellen wäre das Gleichungssystem auf einmal nicht mehr lösbar. Das zeigt, dass der Gauß-Algorithmus gegenüber solchen Rundungsproblemen sehr anfällig ist.
Betrachte auch $\begin{pmatrix} 1 & 1-10^{-16} \\ 1+10^{-16} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 10^{-16} \\ 10^{-16} \end{pmatrix}$ unter Verwendung von 16 Nachkommastellen und vergleiche das erhaltene Ergebnis jeweils mit der exakten Lösung.

P 79. Dualraum

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $dim(V) = n \in \mathbb{N}$.

$V^* := L[V, K]$ bezeichne die Menge aller linearen Abbildungen von V in K mit den üblichen Verknüpfungen für $f, g \in V^*$ und $\lambda \in K$: $f \oplus g : x \mapsto f(x) + g(x) \; \forall x \in V$ und $\lambda \odot f : x \mapsto \lambda \cdot f(x) \; \forall x \in V$

Ferner betrachte man zu einem Untervektorraum U von V die Menge $U^o := \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \; \forall u \in U\}$.

Zeigen Sie:

1. $(V^*, \oplus, \odot)$ ist ein Vektorraum über dem Körper K der Dimension n.
   V^* bezeichnet man als Vektorraum der Linearformen oder als Dualraum von V.

2. U^o ist ein Untervektorraum von V^*.
   Bestimmen Sie insbesondere V^o und $[0]^o$, wobei 0 den Nullvektor von V bezeichnet.

3. Für zwei Untervektorräume U_1 und U_2 von V gilt: $U_1^o \cap U_2^o = (U_1 + U_2)^o$

1a) Nach Aufgabe H59 ist Abb(M, K) ein Vektorraum über K

Bleibt zu zeigen: V^* ist Untervektorraum von Abb(V, K) mit UVK:

- nicht leer: Nullvektor von V^* ist die Nullabbildung $\mathcal{O}: x \mapsto 0 \in K \; \forall x \in V$
- $\oplus$ abgeschlossen: Zu zeigen $f, g \in V^* \Rightarrow f \oplus g \in V^*$ d.h. ist linear!

  $\forall x, y \in V$: $(f \oplus g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) =$
  $= (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)) = (f \oplus g)(x) + (f \oplus g)(y)$

  $\forall x \in V, \lambda \in K$: $(f \oplus g)(\lambda x) = f(\lambda x) + g(\lambda x) = \lambda \cdot (f(x) + g(x)) = \lambda \cdot (f \oplus g)(x)$
- $\odot$ abgeschlossen: Zu zeigen $f \in V^*, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \odot f \in V^*$ d.h. ist linear!

  $\forall x, y \in V$: $(\lambda \odot f)(x+y) = \lambda \cdot f(x+y) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot f(y) = (\lambda \odot f)(x) + (\lambda \odot f)(y)$

  $\forall x \in V, \mu \in K$: $(\lambda \odot f)(\mu x) = \lambda \cdot f(\mu x) = \lambda \cdot \mu \cdot f(x) = \mu \cdot \lambda \cdot f(x) = \mu \cdot (\lambda \odot f)(x)$

1b) Wir suchen eine Basis von V^* und zählen die Basisvektoren ab.

Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann ist eine lineare Abbildung f eindeutig durch die Bilder von b_j unter f bestimmt, da $f(\underbrace{\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j}_{\in V}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{f(b_j)}_{\in K}$.

Betrachte nun für $1 \leq i \leq n$: $f_i : \begin{cases} V \to K \\ b_j \mapsto f_i(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \end{cases}$

Dann lässt sich jede beliebige lineare Abbildung $f: V \to K$ als Linearkombination der f_i schreiben, da mit $f(b_j) = a_j \in K$ gilt:

$f(b_j) = a_j = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i(b_j) = \sum_{i=1}^n (a_i \odot f_i)(b_j) \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i \odot f_i)(x) \; \forall x \in V$

Bleibt zu zeigen: $(f_1, \dots, f_n)$ sind linear unabhängig

Ansatz: $\sum_{i=1}^n \lambda_i \odot f_i = \mathcal{O}$ Nullabbildung $\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^n \lambda_i \odot f_i)(x) = 0 \in V \; \forall x \in V$ (LK von Funktionen)

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(x) = 0 \; \forall x \in V$ (LK der Funktionswerte)

$\Rightarrow$ Insbesondere für $x = b_j$: $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(b_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \; \forall 1 \leq j \leq n \Rightarrow$ Beh.

Bem: Analog kann man für K-Vektorräume V, W mit $\dim(V)=n$ und $\dim(W)=m$ zeigen, dass die Menge $L[V,W]$ aller linearen Abbildungen von V in W ein Vektorraum der Dimension $n\cdot m$ ist.

Bem: In Koordinatendarstellung $K^n \cong V$ bzgl. einer Basis $\{b_1,\dots,b_n\}$ ist V^* die Menge der linearen Abbildungen $f: x \mapsto A\cdot x$ mit $(1\times n)$-Matrizen $A \in K^{1\times n} = \{(a_1,\dots,a_n) \mid a_i \in K\}$ (Zeilenvektoren)

also $f: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1,\dots,a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ $\left(\begin{array}{l} f\oplus g: \text{elementweise Add. von Matrizen} \\ s\odot f: \text{elementweise Mult. von Matrizen} \\ \text{mit dem Skalar } s \in K \end{array}\right)$

Spaltenvektor $(1\times n)$-Matrix $\cdot$ $(n\times 1)$-Matrix = Skalar

2) $\mathcal{U}^\circ := \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U}\}$ ist Untervektorraum, da nach UVK

- die Nullabbildung σ in $\mathcal{U}^\circ$ enthalten ist $\Rightarrow \mathcal{U}^\circ \neq \emptyset$
- $\left.\begin{array}{l} f_1 \in \mathcal{U}^\circ \Rightarrow f_1(u) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U} \\ f_2 \in \mathcal{U}^\circ \Rightarrow f_2(u) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U} \end{array}\right\} \Rightarrow (f_1 \oplus f_2)(u) = f_1(u) + f_2(u) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U}$
  $\Rightarrow f_1 \oplus f_2 \in \mathcal{U}^\circ$, $\oplus$ abgeschlossen
- $\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{U}^\circ \Rightarrow f(u) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U} \\ s \in K \end{array}\right\} \Rightarrow (s \odot f)(u) = s\cdot f(u) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U} \Rightarrow s\odot f \in \mathcal{U}^\circ$
  $\odot$ abgeschlossen

$V^\circ = \{f \in V^* \mid f(v) = 0 \ \forall v \in V\} = \{\sigma\} = \{\text{Nullabbildung}\}$

$[0]^\circ = \{f \in V^* \mid f(\sigma) = \sigma\} = V^*$

Bem.: Man kann zeigen: $\dim(\mathcal{U}) = k \Leftrightarrow \dim(\mathcal{U}^\circ) = n-k$.

3) Zu zeigen: (α) $\mathcal{U}_1^\circ \cap \mathcal{U}_2^\circ \subseteq (\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2)^\circ$ und (β) $(\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2)^\circ \subseteq \mathcal{U}_1^\circ \cap \mathcal{U}_2^\circ$

(α) $f \in \mathcal{U}_1^\circ \cap \mathcal{U}_2^\circ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \in \mathcal{U}_1^\circ \Rightarrow f(u_1) = 0 \ \forall u_1 \in \mathcal{U}_1 \\ f \in \mathcal{U}_2^\circ \Rightarrow f(u_2) = 0 \ \forall u_2 \in \mathcal{U}_2 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow f(u_1) + f(u_2) = f(u_1+u_2) = 0 \ \forall u_1 \in \mathcal{U}_1, \forall u_2 \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(u) = 0 \ \forall u = u_1+u_2 \in \mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2 \quad \Rightarrow f \in (\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2)^\circ$

(β) $f \in (\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2)^\circ \Rightarrow f(u) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$

$\Rightarrow$ insbesondere wegen $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ und $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$:

$\left\{\begin{array}{l} f(u) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow f \in \mathcal{U}_1^\circ \\ f(u) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow f \in \mathcal{U}_2^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow f \in \mathcal{U}_1^\circ \cap \mathcal{U}_2^\circ$

Bem: Analog kann man zeigen: $\mathcal{U}_1^\circ + \mathcal{U}_2^\circ = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^\circ$.