Info für Lehramtsstudierende:

Do 17.01.08

17 Uhr

Fakultätsraum Mathematik

Treffen der Lehramtsstudierenden

Überblick

④ Lineare Abbildungen

→ Definition ($f: V \to W$, V, W $\mathbb{K}$-VRe)

$\forall v_1, v_2 \in V: f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$, $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}: f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

($\leftrightarrow$ VR-Homomorphismus)

→ Elementare Eigenschaften

$\forall v_1, v_2 \in V: \; f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)$

$f(0_V) = 0_W$

$f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(v_n)$

$\Rightarrow$ f ist durch die Bilder der Basisvektoren festgelegt

→ Lineare Abbildungen in Matrizenschreibweise

→ Def.: Kern / Bild linearer Abbildungen

→ Satz: Kern ist Unter-VR von V

Bild ist Unter-VR von W

→ Dimensionssatz / Dimensionsformel

($f: V \to W$ linear, V, W endl. erz. VRe)

$$\dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f) = \dim V$$

→ Quotientenräume

→ Isomorphiesatz:

($f: V \to W$ linear) $\quad V/_{\operatorname{Kern}(f)} \cong \operatorname{Bild}(f)$

Lineare Abbildungen in Matrixschreibweise

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \longmapsto w = \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & W \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Basis $w_1, w_2, \ldots, w_m$

$$v_1 \longmapsto \sum_{i=1}^{m} \mu_{i1} w_i$$

$$\vdots$$

$$v_n \longmapsto \sum_{i=1}^{m} \mu_{in} w_i$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{m1} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

Indizes in Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{mn} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij}

$i \leftrightarrow$ Zeile Zeilen zuerst

$j \leftrightarrow$ Spalte Spalten später

$\boxed{\text{Aufgabe Z73}}$

Geg: 2 $\mathbb{K}$-VR V, W

$(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$ Basis in V

lineare Abb. $f: V \to W$

Aufgabe P73.1

Beh: f ist injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{0_V\}$

Bew: "$\Rightarrow$": f ist injektiv $\Rightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{0_V\}$

f injektiv $\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V: f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$

$\overset{v_2 = 0_V}{\Longrightarrow} \forall v_1 \in V: f(v_1) = f(0_V) \underset{f \text{ lin}}{=} 0_W \Rightarrow v_1 = 0_V$

$\Rightarrow \forall v_1 \in V: f(v_1) = 0_W \Rightarrow v_1 = 0_V$

$\Rightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{0_V\}$

"$\Leftarrow$": $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\} \Rightarrow f$ ist injektiv

$\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$ $\quad$ z.z.: f ist injektiv

$$\Big(\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0_W$$

$$\overset{f \text{ lin.}}{\Longrightarrow} f(v_1 - v_2) = 0_W$$

$$\Rightarrow (v_1 - v_2) \in \mathrm{Kern}(f) \overset{\text{Vor.}}{=} \{0_V\}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \Big)$$

$\Leftrightarrow f$ ist injektiv

Aufgabe Z 73.2

Beh: f ist injektiv $\Leftrightarrow (f(b_1), \dots, f(b_n))$ lin. unabh. in W

Bew: "$\Rightarrow$" f injektiv $\Rightarrow (f(b_1) \dots, f(b_n))$ lin. unabh. in W

z.z. $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ sind lin. unabh.

(Sei $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(b_i) = 0_W$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(b_i) \overset{f \text{ lin.}}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) = 0_W \overset{f \text{ lin.}}{=} f(0_V)$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) = f(0_V)$$

$$\overset{f \text{ inj.}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0_V \overset{\mathcal{B} \text{ Basis}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \;)$$

$\Leftrightarrow f(b_1), \dots, f(b_n)$ sind linear unabhängig

"$\Leftarrow$" $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ lin. unabh. in W $\Rightarrow$ f ist injektiv

z.z. f ist injektiv

($\forall v_1, v_2 \in V: v_1 \neq v_2$

$\overset{\mathcal{B}\text{ Basis}}{\Longrightarrow}$ Es gibt eindeutige Linearkombinationen

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \neq v_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$$

mit $\lambda_k \neq \mu_k$ für mindestens ein $k \in \{1, \dots n\}$

$$\Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) - f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i\right)$$

$$\overset{f \text{ lin.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(b_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \cdot f(b_i)$$

$$\neq 0_W \quad \text{da } \lambda_k - \mu_k \neq 0$$

$f(b_1), \dots, f(b_n)$ lin. unabh.

$\Rightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$)

$\Leftrightarrow$ f ist injektiv

Aufgabe Z73.3

Beh: f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $(f(b_1),\dots,f(b_n))$ ist Erz.syst von W

Bew: "$\Rightarrow$" f ist surj. $\Rightarrow$ $(f(b_1),\dots,f(b_n))$ Erz.system von W

f surjektiv

$\Rightarrow \forall w \in W \; \exists v \in V: f(v) = w$

$\Rightarrow \forall w \in W \; \exists v \in V: f(v) \overset{B \text{ Basis}}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) \overset{f \text{ lin}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) = w$

$\Rightarrow \forall w \in W: w \in \operatorname{span}(f(b_1),\dots,f(b_n))$

$\Rightarrow f(b_1),\dots,f(b_n)$ ist ein Erzeugendensystem von W

"$\Leftarrow$" $(f(b_1),\dots,f(b_n))$ Erz. system $\Rightarrow$ f surjektiv

$f(b_1),\dots,f(b_n)$ Erzeugendensystem von W

$\Rightarrow \forall w \in W \; \exists \lambda_i \in \mathbb{K},\, i=1,\dots,n: \; w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) \overset{f \text{ lin}}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right)$

$\Rightarrow \forall w \in W \; \exists v := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ mit $f(v) = w$

$=$

$f: V \to W$ lin. Abb., $b_1,\dots,b_n$ Basis von V

Z 73.2 $\quad f$ inj. $\Leftrightarrow$ $((f(b_1),\dots,f(b_n))$ lin. unabh.$)$

Z 73.3 $\quad f$ surj. $\Leftrightarrow$ $+ ((f(b_1),\dots,f(b_n))$ Erzeugendensystem$)$

f bij. $\Leftrightarrow$ $\underline{\qquad}$ BASIS

Aufgabe Z73.4

Beh: Sei $f: V \to W = V$ linear.

Dann gilt: f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv

Bew: $V = W \Rightarrow \dim V = \dim W = n$, $(b_1, \dots, b_n)$ Basis von V

f injektiv $\overset{Z73.2}{\Longleftrightarrow}$ $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ sind n lin. unabh. Vekt. in $W = V$ mit $\dim W = \dim V = n$

$\Longleftrightarrow$ $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ bilden eine Basis von $W = V$

$\Longleftrightarrow$ $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ ist ein Erzeugendensys. von $W = V$ mit $n = \dim W = \dim V$ Vektoren

$\overset{P73.3}{\Longleftrightarrow}$ f ist surjektiv