Überblick

→ Was & Warum
→ Zahlenbereiche

① Allgemeine algebraische Strukturen
(Gruppen, Ringe, Körper)

1.1 Gruppen

Gruppen / Euklidischer Algorithmus / Kettenbrüche /
Untergruppen / Untergruppenkriterium / injektive, surjektive, bijektive Funktionen /
Gruppenhomomorphismen / Kern und Bild einer Abbildung /
Nebenklassen / Restklassen / Äquivalenzklassen / Partitionen /
Quotientengruppen / Isomorphiesatz: $G/\mathrm{Kern}(f) \cong \mathrm{Bild}(f)$

Permutationen

Permutationsgruppen / Symmetrische Gruppe S_n /
Werteschreibweise / Zyklenschreibweise / Transpositionen /
Satz: n-elem. Gruppe $\cong$ Untergruppe der S_n /
Signum / Fehlstände

② Körper + Ringe

Gruppe → Ring → Körper /
Komplexe Zahlen / Einheitswurzeln /
Fundamentalsatz der Algebra

3 Vektorräume

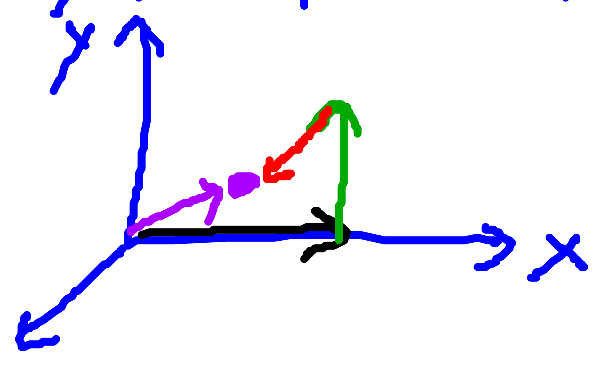
Vektoraddition $+_V$ / Skalarmultiplikation $\cdot_V$ /
Vektorraumaxiome $(V, K, +, \cdot, +_V, \cdot_V)$ /
Untervektorraum / Untervektorraumkriterium /
Linearkombination / Span / Lineare Un-/Abhängigkeit /
Basis / Erzeugendensystem / Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ /
Koordinaten / Steinitzsches Austauschlemma /
Austauschsatz für Basen / Dimension eines VR /
Basiswechsel

4 Lineare Abbildungen

Vektorraum $\leftrightarrow$ Koordinaten

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

konkreter Vektor / konkreter Punkt im $\mathbb{R}^3$



Koordinatenvektor / Koordinaten bzgl. einer Basis $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\text{basis}}{\overset{\text{Standard-}}{=}} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 Ebenen: Vektoren im VR

$\longleftrightarrow$ Koordinaten bzgl. Basis

Basis b_1, b_2, b_3

Vektorraum $\quad v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$

$$\Big\updownarrow \ \text{Iso} \ \cong$$

Koordinaten $\quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

Basiswechsel

VR $\mathbb{R}^3$ Basis b_1, b_2, b_3 $\quad \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \quad$ Basis $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$

$$v = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i b_i \qquad\qquad v = \sum_{i=1}^{3} \mu_i \tilde{b}_i$$

$$\cong \qquad \qquad \cong$$

$$1 \cdot b_1 = b_1 \longmapsto b_1 = \sum \mu_{i1} \tilde{b}_i$$

$$b_2 \longmapsto b_2 = \sum \mu_{i2} \cdot \tilde{b}_i$$

$$b_3 \longmapsto b_3 = \sum \mu_{i3} \cdot \tilde{b}_i$$

$$\tilde{b}_1 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{i1} b_i \longleftarrow \tilde{b}_1$$

$$\tilde{b}_2 = \dots \longleftarrow \tilde{b}_2$$

$$\tilde{b}_3 = \dots \longleftarrow \tilde{b}_3$$

Matrix M

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \dashrightarrow (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

$$(1, 0, 0) \qquad\qquad (\mu_{11}, \mu_{21}, \mu_{31})$$

$\boxed{\text{Aufgabe P64}}$

Geg: 2 Basen $^{(*)}$

$$b_1 = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ b_2 = e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ b_3 = e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \tilde{b}_2 = v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \tilde{b}_3 = v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Aufgabe P64.1

Beh $^{(*)}$: $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Basis vom $\mathbb{R}^3$

Bew: (im $\mathbb{R}^3$) ZZ: v_1, v_2, v_3 lin. unabhängig

Lineare Unabhängigkeit

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &= 0 \\ \mu_2 + \mu_3 &= 0 \\ \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$$

$v_1, v_2, v_3 \longrightarrow$ Linearkomb. in e_1, e_2, e_3

trivial:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_3 \longleftrightarrow (1,0,1)$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \longleftrightarrow (1,1,1)$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 \longleftrightarrow (1,1,2)$$

$e_1, e_2, e_3 \longrightarrow$ Linearkomb. in den v_1, v_2, v_3

Ges: Für $i = 1, 2, 3$:

$\mu_{1i}, \mu_{2i}, \mu_{3i}$ mit $\mu_{1i} v_1 + \mu_{2i} v_2 + \mu_{3i} v_3 = e_i$

$i=1$:

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 = e_1$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &= 1 \\ \mu_2 + \mu_3 &= 0 \\ \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1,\ \mu_3 = -1$$

$$\longleftrightarrow (1, 1, -1)$$

$$\Longleftrightarrow e_1 = v_1 + v_2 - v_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

<u>$i=2$:</u> $e_2 = -v_1 + v_2$

<u>$i=3$:</u> $e_3 = -v_2 + v_3$

Aufgabe P64.2

Geg: 3 Vektoren

$$p = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Ges: Koordinaten von p, q, s

a) bzgl. Standardbasis e_1, e_2, e_3

b) bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3

Aufgabe P64.2.a)

trivial:

$$p = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 6 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3 \longleftrightarrow (6,3,9)$$

$$q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 6 \cdot e_3 \longleftrightarrow (3,2,6)$$

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = s_1 \cdot e_1 + s_2 \cdot e_2 + s_3 \cdot e_3 \longleftrightarrow (s_1, s_2, s_3)$$

Aufgabe P6.2.b)

Wir wissen aus Aufgabe P6.1):

$e_1 = v_1 + v_2 - v_3$, $e_2 = -v_1 + v_2$, $e_3 = -v_2 + v_3$

$$\Rightarrow \quad p = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 6 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3$$

$$= 6 \cdot (v_1 + v_2 - v_3) + 3 \cdot (-v_1 + v_2) + 9 \cdot (-v_2 + v_3)$$

$$= 3 \cdot v_1 + 3 \cdot v_3$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (3, 0, 3)$$

$$\Rightarrow \quad q = v_1 - v_2 + 3 \cdot v_3 \quad \longleftrightarrow (1, -1, 3)$$

$$\Rightarrow \quad s = s_1 \cdot e_1 + s_2 \cdot e_2 + s_3 \cdot e_3$$

$$= s_1 \cdot (v_1 + v_2 - v_3) + s_2 \cdot (-v_1 + v_2) + s_3 \cdot (-v_2 + v_3)$$

$$= \underbrace{(s_1 - s_2)}_{s_1'} \cdot v_1 + \underbrace{(s_1 + s_2 - s_3)}_{s_2'} \cdot v_2 + \underbrace{(-s_1 + s_3)}_{s_3'} \cdot v_3$$

$$= s_1' \cdot v_1 + s_2' \cdot v_2 + s_3' \cdot v_3$$

Vektorraum $\longleftrightarrow$ Koordinaten

VR $\mathbb{R}^3$ Basis e_1, e_2, e_3 $\overset{\cong}{\longleftrightarrow}$ Basis v_1, v_2, v_3

$$s := \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = s_1 \cdot e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3 \qquad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = (s_1 - s_2) \cdot v_1 + (s_1 + s_2 - s_3) \cdot v_2 + (-s_1 + s_3) \cdot v_3$$

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[d, "\cong"'] & s \arrow[d, "\cong"] \\
\text{Koord. } (s_1, s_2, s_3) \arrow[r, "M"] & (s_1 - s_2, s_1 + s_2 - s_3, -s_1 + s_3)
\end{tikzcd}$$