HAUSAUFGABENGRUPPEN

Mo	12^{00}–14^{00}	MI	03.08.011
Mo	16^{00}–18^{00}	MI	02.06.011
Di	17^{00}–19^{00}	MW	1450
Mi	16^{15}–18^{00}	MW	1450
Do	16^{30}–18^{00}	MW	1550

ÜBERBLICK

- 2 Handlungsstränge:
  → Permutationen
  → Quotientengruppen / Nebenklassen

Nachtrag zu Permutationen

- Signum einer Permutation $\pi \in S_n$

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{\overset{\text{Anzahl}}{\#}\ \overline{\text{Transpositionen}}}$$

$$= (-1)^{\overset{\text{Anzahl}}{\#}\ \overline{\text{Fehlstände}}}$$

Nachtrag zu Quotientengruppen/Nebenklassen

$\rightarrow$ Gruppe G, $H \overset{\text{Untergruppe}}{\leq} G$

Bem: Nebenklassen $[g]_H$ haben alle dieselbe Mächtigkeit

Satz: Die Menge aller Nebenklassen bildet eine Partition von G.

$\Rightarrow$ Satz von Lagrange:

G Gruppe, $H \leq G$ Untergruppe

$$\Longrightarrow \quad |H| \underset{\text{teilt}}{\Big|} |G|$$

Mächtigkeit (Anzahl der Elemente)

<u>Satz:</u> $(G/_H, \cdot)$ ist Gruppe

$$[g_1]_H \cdot [g_2]_H = [g_1 \circ g_2]_H$$

<u>Isomorphiesatz für kommutative Gruppen:</u>

$(G, \circ)$, $(H, \cdot)$ Gruppen

$f: G \to H$ Gruppenhomomorphismus

Dann gilt $G/_{\mathrm{Kern}(f)} \overset{\text{isomorph}}{\cong} \mathrm{Bild}(f)$

$$[x]_{\mathrm{Kern}(f)} \mapsto f(x)$$

2 Körper + Ringe

Def: Ring $(R,+,\cdot)$ / Ring mit 1

Bsp: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$

$(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \odot_p)$ für alle $p \in \mathbb{N}$

$(p\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\left(\left\{\frac{a}{2^i} \mid a \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}\right\},+,\cdot\right)$

Satz: Rechenregeln in Ringen:

$0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$ / $(-1) \cdot x = -x$ / $(-1)\cdot(-1) = 1$

$\longrightarrow$ Endliche Ringe:

Bsp: $(\mathbb{Z}_4, \oplus_4, \odot_4)$ $(\mathbb{Z}_5, \oplus_5, \odot_5)$

Def: Körper $(K, +, \cdot)$

$\longrightarrow$ Notationen

neutr. El. / inverse Elemente

0 / $-a$ bzgl. "$+$"

1 / a^{-1} bzw. $\frac{1}{a}$ bzgl. "$\cdot$"

$\longrightarrow$ Der kleinste Körper $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2, \odot_2)$

allg: p Primzahl $\Longleftrightarrow (\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \odot_p)$ ist Körper

Satz: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist Körper

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

$\rightsquigarrow$ Komplexe Zahlen

$\boxed{\text{Gruppe} \rightarrow \text{Ring} \rightarrow \text{Körper}}$

Gruppe $(G, \circ)$

→ EINE Menge G

→ EINE Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$

$(G, \circ)$ ist Gruppe

$\Leftrightarrow$ (0) Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in G: a \circ b \in G$

(i) Assoziativität: $\forall a, b, c \in G: (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(ii) Neutrales Element: $\exists e \in G \; \forall g \in G: e \circ g = g$

(iii) Inverse Elemente: $\forall g \in G \; \exists g^{-1} \in G: g^{-1} \circ g = e$

BONUS: Kommutativität: $\forall a, b \in G: a \circ b = b \circ a$

→ kommutative Gruppe

Ring $(R,+,\cdot)$

→ EINE Menge R $\qquad +: R\times R \to R$

→ ZWEI Verknüpfungen $\qquad \cdot : R\times R\to R$

$(R,+,\cdot)$ ist Ring

$\Leftrightarrow$ (I) $(R,+)$ ist kommutative Gruppe

(II) (o) Abgeschlossenheit bzgl. "$\cdot$": $\forall a,b\in R: a\cdot b\in R$

(i) Assoziativität bzgl. "$\cdot$": $\forall a,b,c\in R: (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

(III) Distributivgesetze: $\forall a,b,c\in R: a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

$\forall a,b,c\in R: (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

BONUS:
- Neutrales Element 1 bzgl. "$\cdot$"
  → Ring mit Eins / mit 1
- Kommutativität bzgl. "$\cdot$"
  → kommutativer Ring

Körper $(K,+,\cdot)$

$\to$ EINE Menge K

$\to$ ZWEI Verknüpfungen $\quad +: K \times K \to K$, $\quad \cdot: K \times K \to K$

$(K,+,\cdot)$ ist Körper

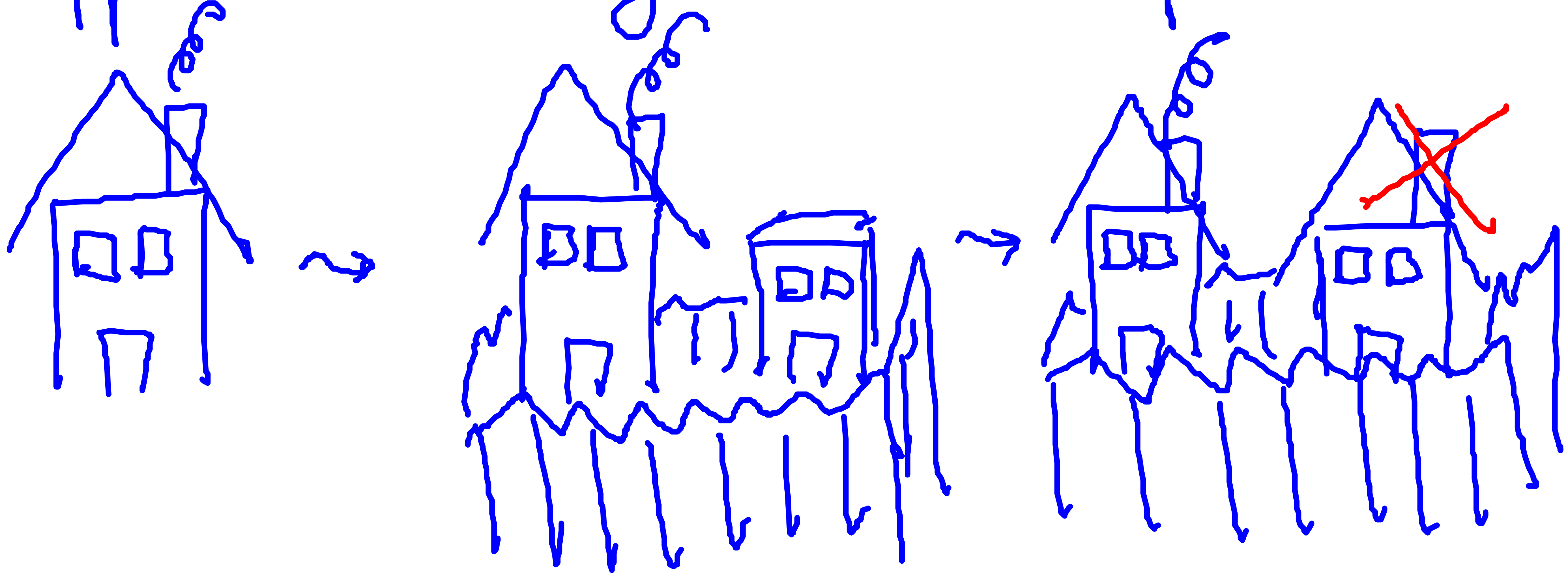
$\Leftrightarrow$ (I) $(K,+)$ ist kommutative Gruppe

(II) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe

(III) Distributivgesetz:

$\forall a,b,c \in K: \; a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

Gruppe → Ring → Körper.



$\boxed{\text{Aufgabe Z34}}$

Geg: 2 Gruppen $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus_{12})$ $(\mathbb{Z}_3, \oplus_3)$

Abbildung
$$f: \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$$
$$x \longmapsto x \bmod 3$$

Bem: Was macht f?

$$\begin{array}{lll} 0 \mapsto 0 & 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 0 & 4 \mapsto 1 & 5 \mapsto 2 \\ 6 \mapsto 0 & 7 \mapsto 1 & 8 \mapsto 2 \\ 9 \mapsto 0 & 10 \mapsto 1 & 11 \mapsto 2 \end{array}$$

Bem: $3 \mid 12 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}: (x \bmod 12) \bmod 3 = x \bmod 3$

Achtung: $5 \nmid 12$: $(16 \bmod 12) \bmod 5 = 4 \bmod 5 = 4$ $\neq$

aber $(16 \bmod 5) = 1$

Beh ⊗: Seien $u, v \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$v \mid u \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}: (x \bmod u) \bmod v = x \bmod v$$

Bew: Nach Division mit Rest

$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}: x = q \cdot u + r$ mit $0 \leq r < u$

$v \mid u \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}: u = m \cdot v$

$\Rightarrow x = q \cdot u + r = q \cdot m \cdot v + r$ mit $0 \leq r < u$

$\Rightarrow (x \bmod u) \bmod v = ([q \cdot u + r] \bmod u) \bmod v = r \bmod v$

$x \bmod v = (q \cdot m \cdot v + r) \bmod v = r \bmod v$

Aufgabe Z34.1

Beh: f ist ein Epimorphismus,
d.h. f ist ein surjektiver Homomorphismus

Bew: f ist surjektiv:
z.z: $\forall y \in \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}\ \exists x \in \mathbb{Z}_{12}: f(x) = y$
Es ist $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ ✓

f ist ein Homomorphismus:
z.z: $\forall x, y \in \mathbb{Z}_{12}: f(x \oplus_{12} y) = f(x) \oplus_3 f(y)$

$$
\begin{aligned}
f(x \oplus_{12} y) &= (x \oplus_{12} y) \bmod 3 \\
&= [(x+y) \bmod 12] \bmod 3 \\
&\overset{\circledast}{=} (x+y) \bmod 3 \\
&= [(x \bmod 3) + (y \bmod 3)] \bmod 3 \\
&= \underbrace{(x \bmod 3)} \oplus_3 \underbrace{(y \bmod 3)} \\
&= f(x) \oplus_3 f(y)
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow \mathrm{Kern}(f) := \{x \in \mathbb{Z}_{12} : f(x) = 0\}$

$= \{0, 3, 6, 9\}$

f Homomorphismus

$\Rightarrow \mathrm{kern}(f)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus_{12})$

Aufgabe Z34.2

Geg.: Gruppe $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus_{12})$

Untergruppe: $\ker(f) = \{0,3,6,9\}$

$\rightarrow \mathbb{Z}_{12}/_{\ker(f)} = \{ [a]_{\ker(f)} \mid a \in \mathbb{Z}_{12} \}$

mit $[a]_{\ker(f)} = \{ a \oplus_{12} x \mid x \in \ker(f) \} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$

$[0]_{\ker(f)} = \{0,3,6,9\} = \ker(f)$

$= [3]_{\ker(f)} = [6]_{\ker(f)} = [9]_{\ker(f)}$

$[1]_{\ker(f)} = \{1,4,7,10\}$

$= [4]_{\ker(f)} = [7]_{\ker(f)} = [10]_{\ker(f)}$

$[2]_{\ker(f)} = \{2,5,8,11\}$

$= [5]_{\ker(f)} = [8]_{\ker(f)} = [11]_{\ker(f)}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{12}/_{\text{kern}(f)} = \{[0]_{\text{kern}(f)}, [1]_{\text{kern}(f)}, [2]_{\text{kern}(f)}\}$

$\rightarrow$ Partition von $\mathbb{Z}_{12}$ in 3 Nebenklassen mit jeweils 4 Elementen.

Aufgabe Z 34.3

<u>Beh:</u> $\mathbb{Z}_{12}/_{\text{kern}(f)} \overset{\text{isomorph}}{\cong} \mathbb{Z}_3$

<u>Bew:</u> $\rightarrow$ mit Isomorphiesatz

$\rightarrow$ durch direkte Angabe eines Isomorph.

a.) mit Isomorphiesatz

<u>allg:</u> Seien $(G,\circ)$ $(H,\cdot)$ Gruppen und $f: G \to H$ ein Homomorphismus

Dann gilt: $G/_{\text{kern}(f)} \cong \text{bild}(f)$

$$
\begin{tikzcd}
(G,\circ) \arrow[r, "f \text{ Homomorph.}"] \arrow[d, "\text{Quot. bildung}"] & \text{bild}(f) \subseteq (H,\cdot) \arrow[dl, "\text{Isomorphismus folgt!}"] \\
G/_{\text{kern}(f)} &
\end{tikzcd}
$$

unsere Aufgabe:

$(G,\circ) = (\mathbb{Z}_{12}, \oplus_{12})$, $(H,\cdot) = (\mathbb{Z}_3, \oplus_3)$

$$f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3, \quad x \mapsto x \bmod 3 \qquad \text{surj. Homomorphismus}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}_{12},\oplus_{12}) \arrow[r, "f\ \text{Epimorphismus}"] \arrow[d, "\text{Quot. bildung}"'] & \operatorname{bild}(f) = (\mathbb{Z}_3,\oplus_3) \arrow[dl, leftrightarrow, "\text{Isomorphie folgt!}"] \\
\mathbb{Z}_{12}/\operatorname{kern}(f) &
\end{tikzcd}$$

b) durch direkte Angabe eines Isomorphismus

$$g: \mathbb{Z}_{12}/_{\text{kern}(f)} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$$

$$[x]_{\text{kern}(f)} \longmapsto x \bmod 3$$

Beh: g ist Isomorphismus

Bew: siehe Musterlösung

Bem: Was ist $\ominus_{12}$?

$(\mathbb{Z}_{12}, \oplus_{12})$ $a \oplus_{12} b$ Addition mod 12

$a \ominus_{12} b$ Subtraktion mod 12

Es gilt: $a \ominus_{12} b = a \oplus_{12} b^{-1}$

mit b^{-1} Inverses von b

Bsp: $8 \oplus_{12} 5 = (8+5) \bmod 12 = 13 \bmod 12 = 1$

$8 \ominus_{12} 5 = (8-5) \bmod 12 = 3 \bmod 12 = 3$

$5^{-1} = \text{"}-5\text{"} = \text{"}-5+12\text{"} = \text{"}12-5\text{"} = 7,$

$[5]^{-1} = [-5] = [7]$

denn $5 \oplus_{12} 7 = (5+7) \bmod 12 = 0$

$8 \ominus_{12} 5 = 8 \oplus_{12} 5^{-1} = 8 \oplus_{12} 7 = 15 \bmod 12 = 3$

Aufgabe Z34.4

$f: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$
$x \mapsto x \bmod 3$

Beh: Auf $\mathbb{Z}_{12}$ ist
$a \sim b \;:\Leftrightarrow\; a \ominus_{12} b \in \ker(f)$
eine Äquivalenzrelation

Bew: z.z.: $\sim$ ist reflexiv
symmetrisch
transitiv

→ siehe Musterlösung

Ein "schneller Schritt" der Musterlösung
ausführlich:

$$(b \ominus_{12} a) \bmod 3$$

$$= \left((b \ominus_{12} a)^{-1}\right)^{-1} \bmod 3$$

$$= \left((b \oplus_{12} a^{-1})^{-1}\right)^{-1} \bmod 3$$

$$= (a \oplus_{12} b^{-1})^{-1} \bmod 3 ,$$

denn $(b \oplus_{12} a^{-1}) \oplus_{12} (a \oplus_{12} b^{-1}) = b \oplus_{12} b^{-1} = 0$

$$= (a \ominus_{12} b)^{-1} \bmod 3$$

$$= (12 - (a \ominus_{12} b)) \bmod 3$$

Aufgabe Z34.5

Beh: $\forall a \in \mathbb{Z}_{12}$

$$[a]_\sim = [a]_{\mathrm{kern}(f)}$$

Bew: Sei $b \in [a]_{\mathrm{kern}(f)} = a \oplus_{12} \mathrm{kern}(f)$

$\Leftrightarrow \exists y \in \mathrm{kern}(f)$ mit $b = a \oplus_{12} y$

$\Leftrightarrow b \ominus_{12} a = y \in \mathrm{kern}(f)$

$\Leftrightarrow b \sim a$

$\Leftrightarrow b \in [a]_\sim$