# Überblick

## Permutationen / Symmetrische Gruppe $S_n$

- Def.: Permutation: $\pi : E_n \to E_n$ bijektiv
- Werteschreibweise $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
- Bsp: $(S_3, \circ)$ ist Gruppe
- Satz: $(S_n, \circ)$ ist Gruppe.
- $(S_3, \circ)$: Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks

- **Satz:** Jede endliche Gruppe mit n Elementen ist isomorph zu einer Untergruppe der $(S_n, \circ)$.

wesentlicher Bestandteil des Beweises:

Jede Zeile der Gruppentafel liefert eine Permutation in $S_n$.

- <u>Zyklenschreibweise</u>

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1\,3\,6) \circ (2\,4) \circ (5\,7)$$

- <u>Transpositionen</u> (2-Zykel)

$$\pi = (1\,3\,6) \circ (2\,4) \circ (5\,7) = (1\,3) \circ (3\,6) \circ (2\,4) \circ (5\,7)$$

- <u>Satz</u>: Jedes Element der $S_n$ $(n \geq 2)$ lässt sich als Hintereinanderausführung von Transpositionen schreiben.

- **Es gilt:** Darstellung von $\pi \in S_n$ $(n \geq 2)$ als Hintereinanderausf. von Transpositionen ist nicht eindeutig,

  die Anzahl der verwendeten Transpositionen ist nicht eindeutig,

  aber die Parität der Anzahl der verwendeten Transpositionen ist eindeutig.

- **Def:**

$$\mathrm{sign}: S_n \longrightarrow \{-1,+1\}$$
$$\pi \longmapsto \mathrm{sign}(\pi) := (-1)^{\#\text{Transpositionen}}$$

$$\mathrm{sign}(\pi) = \mathrm{sign}((13)\circ(36)\circ(24)\circ(57)) = (-1)^4 = 1$$

# Aufgabe Z26

Geg: Menge $M$

Beziehung / Relation zwischen je zwei Elementen $x, y \in M$, die entweder zutrifft oder nicht zutrifft

Wir schreiben

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow \text{Relation trifft zu}$$

Bsp: $M = \mathbb{R}$ ; Relation: $<$

$5 \sim 7$ , aber $7 \not\sim 5$

Def: Eine Relation $\sim$ ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$

$(a,b) \in R \iff a \sim b$

Bsp: $M = \mathbb{R}$ ; Relation : $<$

$R = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a < b\}$

**Def:** Eine Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine Äquivalenzrelation

$\Leftrightarrow$ (1) reflexiv:

$\forall x \in M: x \sim x$

(2) symmetrisch:

$\forall x, y \in M: x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(3) transitiv:

$\forall x, y, z \in M: x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

**Bsp:** für Äquivalenzrelationen

$=$

Def: Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation

Zu $x \in M$:

$$[x]_R := \{ y \in M \mid y \sim x \}$$

= Äquivalenzklasse von $x$ bzgl. $R$

Es gilt: Die Menge der Äquivalenzklassen bildet eine Partition von $M$.

# Aufgabe Z26.1

$M = \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

(1) reflexiv: ✓

$(x_1, y_1) \sim (x_1, y_1) :\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ ✓

(2) symmetrisch: ✓

$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

$\Leftrightarrow x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow: (x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$ ✓

(3) transitiv: ✓

$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$

$:\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \wedge x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$

$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$ ✓

Äquivalenzklassen:

$$[(a,b)]_\sim = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+y_1^2 = a^2+b^2\}$$

= Kreis um $(0,0)$ durch $(a,b)$ mit Radius $\sqrt{a^2+b^2}$

Partition von $\mathbb{R}^2$ in konzentrische Kreise um $(0,0)$

# Aufgabe Z 26.2

$M = \mathbb{R}^2 \qquad (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$

(1) reflexiv: ✓

$(x_1, y_1) \sim (x_1, y_1) :\Leftrightarrow x_1 \cdot y_1 = x_1 \cdot y_1$ ✓

(2) symmetrisch: ✓

$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$

$\Leftrightarrow x_2 y_1 = x_1 y_2 \Leftrightarrow: (x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$ ✓

(3) transitiv: ↯

Gegenbeispiel: $(1,2) \sim (0,0)$, denn $1 \cdot 0 = 0 \cdot 2$

und $(0,0) \sim (3,4)$, denn $0 \cdot 4 = 3 \cdot 0$,

aber $(1,2) \not\sim (3,4)$, denn $1 \cdot 4 = 4 \neq 3 \cdot 2 = 6$

keine Äquivalenzrelation

## Aufgabe Z26.3

$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\quad (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 \cdot y_1$

(1) reflexiv ✓ (2) symmetrisch ✓

(3) transitiv:

z.z: $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$

$:\Leftrightarrow \quad ad = bc \quad \wedge \quad cf = de \quad \Rightarrow \quad af = be$

$ad \overset{(1)}{=} bc \wedge cf \overset{(2)}{=} de \Rightarrow acdf = bcde$

Nach Vor: $(a,b) \neq (0,0)$, $(c,d) \neq (0,0)$ $(e,f) \neq (0,0)$

Fallunterscheidung für $(c,d) \neq (0,0)$

Fall 1: $c \neq 0 \wedge d \neq 0$

Kürzen durch $cd \Rightarrow$ Beh.

<u>Fall 2:</u> $c = 0 \wedge d \neq 0$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} ad = 0 \overset{d \neq 0}{\Longrightarrow} a = 0$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} de = 0 \overset{d \neq 0}{\Longrightarrow} e = 0$$

$$a = e = 0 \Rightarrow af = be = 0 \cdot f + 0 \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow af = be$$

<u>Fall 3:</u> $c \neq 0 \wedge d = 0$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} bc = 0 \overset{c \neq 0}{\Longrightarrow} b = 0$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} cf = 0 \overset{c \neq 0}{\Longrightarrow} f = 0$$

$$b = f = 0 \Rightarrow af = be = a \cdot 0 = 0 \cdot e = 0$$

ist Äquivalenzrelation

# Äquivalenzklassen

$$[(a,b)]_\sim = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xb = ya\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R} \mid bx - ay = 0\}$$

= Gerade durch den Ursprung und den Punkt $(a,b)$ (ohne den Punkt $(0,0)$ )

Partition von $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

In das Geradenbüschel durch $\sigma = (0,0)$ ohne den Punkt $(0,0)$

| Nebenklassen | Äquivalenzklassen |
| --- | --- |
| kommutative Gruppe $(G, \circ)$ | Menge $M$ = kommutative Gruppe $(G, \circ)$ |
| Untergruppe $H$ | Untergruppe $H$ |
| Nebenklassen $[g]_H$ | $\rightsquigarrow$ Relation: $g_1 \sim g_2 :\Leftrightarrow g_1 - g_2 \in H$ |
| $[g_1]_H = [g_2]_H \Leftrightarrow g_1 - g_2 \in H$ | ist Äquivalenzrelation ✓ |
| | Äquivalenzklassen $[g]_\sim$ |
| | $g_1 \sim g_2 \Rightarrow [g_1]_\sim = [g_2]_\sim$ |
| $\rightsquigarrow$ Partition | $\rightarrow$ Partition |

<u>Bem.:</u> $g_1 - g_2$ bedeutet hier: $g_1 \circ g_2^{-1}$