Überblick

▶ 1.1. Gruppen

[...]

Untergruppen

→ Definition

→ Untergruppenkriterium

→ von $M \subseteq G$ erzeugte Untergruppe $\langle M \rangle$

→ Satz: Eindeutigkeit von $\langle M \rangle$ ⇝ M14 ⇝ P25

→ Untergruppen von $(\mathbb{R}^2, \oplus)$

→ Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ ⇝ P16

Injektive / Surjektive / Bijektive Funktionen

→ Definition injektiv/surjektiv/bijektiv
→ Tatsachen für bijektive Abbildungen

Gruppenhomomorphismus

→ Definition:
$(G,\circ), (H,\bullet)$ $f: G \to H$ $\forall g_1 g_2 \in G: f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2)$
→ Gruppenisomorphismus
→ 2 Beispiele
→ Definition Kern und Bild
→ Satz: $f: G \to H$ Gruppenhom.
$\Rightarrow$ Kern(f) ist Untergruppe von G
→ Bild(f) ist Gruppe ⤳ H28

Nebenklassen / Restklassen

→ wichtige Voraussetzung:
G ist eine KOMMUTATIVE Gruppe

→ Linksnebenklasse von g bzgl. H $\quad g \circ H =: [g]_H$

→ "Quotientengruppe G/H

$G/H := \{g \circ H \mid g \in G\} = \{[g]_H \mid g \in G\}$

→ Definition: $N \circ M$ für 2 Mengen N, M

→ Satz: $[g_1]_H \circ [g_2]_H = [g_1 \circ g_2]_H$

→ Satz: $(G/H, \circ)$ IST Gruppe.

→ Bsp: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

→ Partition

Aufgabe Z.17

Geg: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \mapsto (x-3y+z, -x+2y, y-z)$

Aufgabe Z.17.1

→ Vorlesung: $(G,\circ), (H,\bullet), f: G \to H$

$\mathrm{Kern}(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\} \subseteq G$

$\mathrm{Bild}(f) := \{f(g) \in H \mid g \in G\} \subseteq H$

$= \{h \in H \mid \exists g \in G : f(g) = h\}$

Ges: $\mathrm{Kern}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$\mathrm{Bild}(f) = \{f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z \in \mathbb{R}^3\}$

$\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (a,b,c)\}$

Kern(f)

Suche $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow$ LGS

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \quad \mathrm{I} \\ -x + 2y &= 0 \quad \mathrm{II} \\ y - z &= 0 \quad \mathrm{III} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \quad && \mathrm{I} \\ -y + z &= 0 \quad && \mathrm{II} + \mathrm{I} \\ -y + z &= 0 \quad && (-1) \cdot \mathrm{III} \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ -y + z &= 0 \\ 0 &= 0 \quad && \mathrm{III} - \mathrm{II} \end{aligned} \right.$$

Wähle $z = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \lambda\,,\ x = 2\lambda$

$\Rightarrow (x,y,z) = (2\lambda, \lambda, \lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{(2\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \{\lambda \cdot (2,1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

geometrische Deutung:

$\rightsquigarrow$ Gerade im $\mathbb{R}^3$

mit Richtung $(2,1,1)$

Bild(f)

Suche alle $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, für die es ein $\underbrace{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3}$

nicht notwendig eindeutig

mit $f(x,y,z) = (a,b,c)$

$$f(x,y,z) = (a,b,c)$$

$$\Leftrightarrow \text{LGS} \quad \begin{aligned} x - 3y + z &= a \\ -x + 2y \quad\quad &= b \\ y - z &= c \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x - 3y + z &= a && \mathrm{I} \\ -y + z &= a + b && \mathrm{II} + \mathrm{I} \\ -y + z &= -c && (-1) \cdot \mathrm{III} \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x - 3y + z &= a && \mathrm{I} \\ -y + z &= a + b && \mathrm{II} \\ 0 &= a + b + c && \mathrm{III} - \mathrm{II} \end{aligned} \right.$$

LGS nur dann lösbar, wenn $a+b+c=0$

$\Rightarrow \text{Bild}(f) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$

$\rightsquigarrow$ geom. Deutung: Ebene im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe Z 17.2

→ Vorlesung:

$(G, \circ), (H, \bullet)$ Gruppen, $f: G \to H$ Abb.

$f: G \to H$ ist ein Homomorphismus

$\Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G: f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2)$

f Homomorphismus ?

$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2))$

$= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$= ((x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2),$

$-(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2),$

$(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2))$

$$= \left((x_1 - 3y_1 + z_1,\ -x_1 + 2y_1,\ y_1 - z_1) \right.$$
$$\left. + (x_2 - 3y_2 + z_2,\ -x_2 + 2y_2,\ y_2 - z_2) \right)$$

$$= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$$

$\Rightarrow$ f ist Homomorphismus!

f surjektiv?

$\to f: G \to H$ surjektiv

$\Leftrightarrow \forall h \in H \ \exists g \in G: f(g) = h$

$\Leftrightarrow$ "Jedes Element in H wird mindestens einmal getroffen"

$\Leftrightarrow \text{Bild}(f) = H$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\text{Bild}(f) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\} \subset \mathbb{R}^3$

echte Teilmenge

$\Rightarrow$ f ist nicht surjektiv

f injektiv?

$\to f: G \to H$ injektiv

$\Leftrightarrow \forall x, y \in G: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in G: x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$\Leftrightarrow$ "Jedes Element in H wird "höchstens" einmal getroffen."

$\Leftrightarrow$ für f Homomorphismus $\mathrm{Kern}(f) = \{e_G\}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\mathrm{kern}(f) = \{\lambda(2,1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow |\mathrm{kern}(f)| > 1$, z.Bsp: $f((0,0,0)) = (0,0,0) = f(2,1,1)$

$\Rightarrow$ f ist nicht injektiv

Beh. 1: $f: G \to H$ Gruppenhomomorphismus

Dann gilt: $f(e_G) = e_H$

Bew. 1: $\forall g \in G \quad f(g \cdot e_G) = f(g) \overset{f \text{ Hom.}}{=} f(g) \cdot f(e_G)$

$\Rightarrow \forall g \in G: f(g) \cdot f(e_G) = f(g)$

$\Rightarrow f(e_G) = e_H$

Beh. 2: $f: G \to H$ Gruppenhomomorphismus

Dann gilt: $\forall g \in G: f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$

Bew. 2: $\forall g \in G: f(g \circ g^{-1}) = f(e_G) \overset{\text{Beh. 1}}{=} e_H$

$\overset{f\text{ Hom.}}{=} f(g) \bullet f(g^{-1})$

$\Rightarrow \forall g \in G: f(g) \bullet f(g^{-1}) = e_H$

$\Rightarrow f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$

Beh 3: $f: G \to H$ Gruppenhomomorphismus

Dann gilt:

f injektiv $\Leftrightarrow \ker(f) = \{e_G\}$

Bew. 3: "$\Rightarrow$" f inj. $\Rightarrow \ker(f) = \{e_G\}$

f Homomorphismus

$\overset{\text{Beh } 1}{\Longrightarrow} f(e_G) = e_H$

$\Rightarrow e_G \in \ker(f)$

$\overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} \ker(f) = \{e_G\}$

"$\Leftarrow$" $\mathrm{kern}(f) = \{e_G\} \Rightarrow f$ inj.

z.z.: $\forall x, y \in G: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Sei $x, y \in G$ mit $f(x) = f(y)$

$$\Rightarrow f(x) \cdot (f(y))^{-1} = e_H$$

Beh. 2

$$\Rightarrow f(x) \cdot (f(y^{-1})) = e_H$$

f Hom.

$$\Rightarrow f(x \circ y^{-1}) = e_H$$

$\mathrm{kern}(f) = \{e_G\}$

$$\Rightarrow x \circ y^{-1} = e_G$$

$$\Rightarrow y^{-1} = x^{-1}$$

$$\Rightarrow x = y \quad \square$$