Lineare Algebra I

→ Was & Warum?

Motivation / Beispiele

1. geometrische Transformationen
2. Federnetze
3. Pixelbilder
4. Interpolation
5. "4-Punkte auf Kreis"-Entscheid

→ Zahlenbereiche $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

→ Notationen

Funktionenschreibweise

kart. Produkt

① Allgemeine ~~a~~lgebraische Strukturen

($\rightsquigarrow$ Gruppen, Ringe, Körper)

1.1 Gruppen

→ Definition (4 Axiome)

→ Beispiele

$(\mathbb{Z},+)$ $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$

$\mathbb{R}^n$ mit komp. Addition

$(7\mathbb{Z},+)$ $(\mathbb{Z}_7,\oplus_7)$ $(\mathbb{Z}_7-\{0\},\odot_p)$

→ Eigenschaften/Sätze

Aufgabe P10

$n=1$, $n=2$, $n=3$ ① jeweils

$\boxed{n=4}$

Ansatz: $G=\{e,a,b,c\}$

Gruppentafel:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	?		
b	b			
c	c			

(*) Jedes Element einer Gruppe kommt in jeder Zeile und in jeder Spalte der Gruppentafel genau einmal vor.

1. Fall

$\exists\, x \in \{a, b, c\}$ mit $x \cdot x \neq e$

O.B.d.A. $a \cdot a = b$

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

2. Fall

$\forall\, x \in \{a, b, c\}$ gilt $x^2 = e$

$a^2 = b^2 = c^2 = e$

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

mit $\otimes$

Bem: Angenommen, wir hätten statt $a \cdot a = b$

$c \cdot c = a$ gewählt

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

Um- ⇝ sortieren

	e	c	a	b
e	e	c	a	b
c	c	a	b	e
a	a	b	e	c
b	b	e	c	a

$n = 4$ 2

(o) – (iii) ✓

$\boxed{n=5}$

Ansatz: $G = \{e, a, b, c, d\}$

1. Fall:

$\exists x \in \{a,b,c,d\}$ mit $x \cdot x \neq e$

O.B.d.A: $a \cdot a = b$

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a				
b	b				
c	c				
d	d				

Achtung

$(ab)d = ad$

$a(bd) = d$

$\lightning$ Assoziativität

2. Fall

$a^2 = b^2 = c^2 = e$

Gruppe

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	e

1

3

5

4

O.B.d.A: $a \cdot b = c$

1. Fall

$\exists x \in \{a,b,c,d\}$ mit $x \cdot x \neq e$

O.B.d.A: $a \cdot a = b$ Axiome (0)–(iii) ✓ Komm ✓

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	e	d	c
b	b	e	d, c		
c	c				
d	d				

⚡

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e [1]
b	b	c	d	e	a [4]
c	c	d [3]	e	a	b
d	d	e [2]	a	b	c

Fall 1.1: $a \cdot b = e = b \cdot a$

$\boxed{n=5}$ 1

Fall 1.2: $a \cdot b \neq e$ O.B.d.A $a \cdot b = c$

Gruppen müssen nicht kommutativ sein!

Wenn sie es sind, dann spricht man von einer kommutativen Gruppe
abelschen

$$X \cdot X = X$$

gilt nur für welches Element?

$\boxed{\text{Aufgabe H6}}$ Widerstandsschaltungen

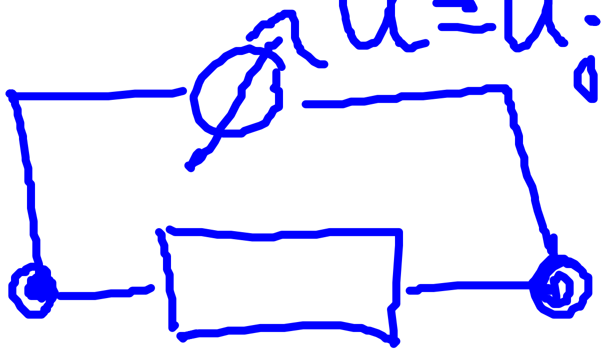
Geg: 2 Schaltpläne

Ges: a) Spannungen U_i an den markierten Knoten

b.) Gesamtwiderstand

→ 2 Gesetze:

(1) Ohm'sches Gesetz:

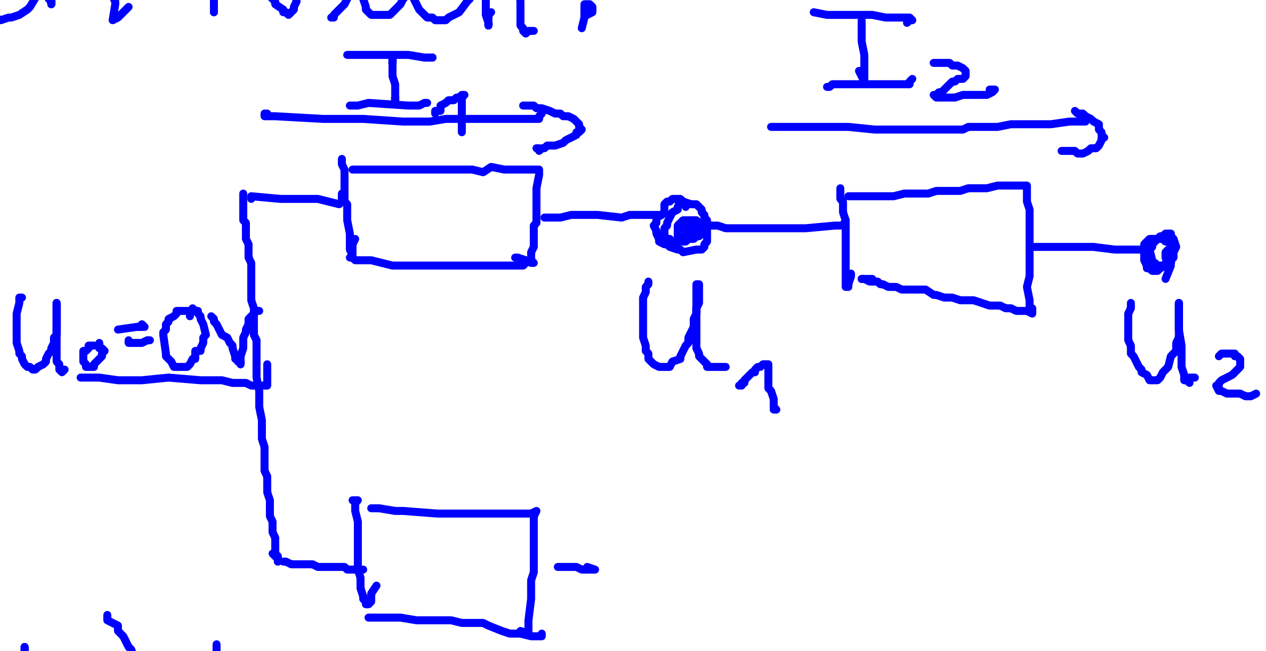


$$U = R \cdot I = U_j - U_i \qquad U_i \xrightarrow[I]{} U_j$$

$$\Rightarrow I = \frac{U_j - U_i}{R}$$

(2) Kirchhoff'sche Gesetz:
Die Summe der (gerichteten) Teilströme ist in jedem Knoten gleich Null!

1. Schaltplan



Knoten U_1:

$$I_1 = I_2$$

$$(U_1 - U_0)/R = (U_2 - U_1)/R$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(U_1 - U_0)/R}_{I_1} + \underbrace{(U_1 - U_2)/R}_{-I_2} = 0$$

$\Rightarrow$ LGS für 1. Schaltplan

Knoten

$U_1: (U_1 - U_0)/R + (U_1 - U_2)/R = 0$

$U_2: (U_2 - U_1)/R + (U_2 - U_3)/R + (U_2 - U_5)/R = 0$

$U_3: (U_3 - U_0)/R + (U_3 - U_2)/R + (U_3 - U_4)/R = 0$

$U_4: (U_4 - U_3)/R + (U_4 - U_5)/R = 0$

$$\underline{\text{LGS:}}\quad
\begin{aligned}
2U_1 - U_2 \phantom{{}+3U_3 - U_4} &= U_0 \quad T \\
-U_1 + 3U_2 - U_3 &= U_5 \\
-U_2 + 3U_3 - U_4 &= U_0 \\
-U_3 + 2U_4 &= U_5
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\text{mit } U_0 = 0\,,\ U_5 = 7\right)$$

$$U_1 = 2\,,\ U_2 = 4\,,\ U_3 = 3\,,\ U_4 = 5$$