1	2

Aufgabe 1. (Punkte: 6)

Gegeben sei die Menge von $2 \times 2-$Matrizen $M := \left\{ \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, x \in \mathbb{Z} \right\}$.

1. Zeigen Sie, dass die Menge M zusammen mit dem Matrizenprodukt eine **kommutative** Gruppe ist.
2. Geben Sie einen Isomorphismus $\varphi : (M, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +)$ an und weisen Sie die Isomorphie-Eigenschaften für φ nach.

1	2

Aufgabe 2. (Punkte: 12)

Multiple choice-Aufgaben zu Permutationen

Alle Elemente $f \in S_3$ der Permutationsgruppe $(S_3, \circ)$ lassen sich in Werteschreibweise $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$ oder in Zykelschreibweise $(a\ f(a)\ ...)$ mit $a \in \{1, 2, 3\}$ darstellen.

$U = \{id, (1\ 2)\}$ sei als eine Untergruppe der S_3 gegeben.

Kreuzen Sie bitte jeweils die richtige Aussage bzw. Antwort an. Begründungen werden nicht gewertet.

Lösung von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ist in S_3:	☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{2008} =$	☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
Mit welchem Element $x \in S_3$ wird $\{id, (1\ 2\ 3), x\}$ zu einer Untergruppe von S_3?	☐ $x = (1\ 3)$	☐ $x = (2\ 3\ 1)$	☐ $x = (3\ 2\ 1)$
Wieviele verschiedene Untergruppen besitzt die S_3 ?	☐ 3	☐ 4	☐ 6
Welche Nebenklassen sind mit $[(1\ 2\ 3)]_U$ identisch ?	☐ $[(1\ 3\ 2)]_U$	☐ $[(2\ 3)]_U$	☐ $[(1\ 3)]_U$
Wieviele Elemente besitzt die Faktorgruppe S_3/U ?	☐ 3	☐ 4	☐ 6

Wertung: Für jede der 6 Teilaufgaben (Zeilen):
2 Punkte bei korrekter Beantwortung,
Punktabzug bei falscher Beantwortung,
0 Punkte bei Nichtbearbeitung.

1	2

Aufgabe 3. (Punkte: 8)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ einer linearen Abbildung

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \ , \ x \mapsto y = Ax$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie den Kern von f.
2. Geben Sie $dim(Bild(f))$ und eine Basis des Bildes von f an.
3. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α alle Urbilder von b, d.h. alle Lösungen von $Ax = b$.

1	2

Aufgabe 4. (Punkte: 8)

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. Bestimme α so, dass $span(v_1, v_2, v_3)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2 ist, und begründen Sie Ihr Ergebnis.
2. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit
   $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt. Begründen Sie Ihr Ergebnis.
3. Sei nun $\alpha = 0$ gewählt. Bestimmen Sie das Bild von $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ unter der linearen Abbildung f aus 2.

1	2

Aufgabe 5. (Punkte: 10)

Multiple choice-Aufgaben zu Abbildungen
Welche Eigenschaften treffen auf die angegebenen Abbildungen f zu ?
Kreuzen Sie bitte **alle** richtigen Aussagen an. Begründungen werden nicht gewertet.

$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} \end{cases}$	☐ linear ☐ nicht linear	☐ injektiv ☐ nicht injektiv	☐ surjektiv ☐ nicht surjektiv
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$	☐ linear ☐ nicht linear	☐ injektiv ☐ nicht injektiv	☐ surjektiv ☐ nicht surjektiv
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$	☐ linear ☐ nicht linear	☐ injektiv ☐ nicht injektiv	☐ surjektiv ☐ nicht surjektiv
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ mit $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und $Kern(A) = \{0\}$	☐ linear ☐ nicht linear	☐ injektiv ☐ nicht injektiv	☐ surjektiv ☐ nicht surjektiv
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $Kern(A) = \{0\}$	☐ linear ☐ nicht linear	☐ injektiv ☐ nicht injektiv	☐ surjektiv ☐ nicht surjektiv

Wertung: Für jede der 5 Teilaufgaben (Zeilen):
2 Punkte bei korrekter Beantwortung,
Punktabzug bei falscher Beantwortung,
0 Punkte bei Nichtbearbeitung.

1	2

Aufgabe 6. (Punkte: 8)

Im $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der $n \times n-$Matrizen $(n > 1)$ sei

$$U = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid a_{ij} = -a_{ji} \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n\}$$

.

1. Zeigen Sie: U ist ein Untervektorraum von $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot)$.
2. Zeigen Sie: $A = (a_{ij}) \in U \;\Rightarrow\; a_{ii} = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.
3. Bestimmen Sie für $n = 3$ eine Basis von U.
4. Geben Sie $dim(U)$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ an.
5. Zeigen Sie: Für $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad A \in U \;\Rightarrow\; det(A) = 0$.
   Hinweis: Betrachten Sie $det(A^T)$!

1	2

Aufgabe 7. (Punkte: 8)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Begründen Sie, warum A invertierbar ist. Die Bestimmung von A^{-1} ist dabei nicht verlangt!
2. Zeigen Sie, dass v_1 ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1.
3. Bestimmen Sie einen Eigenvektor v_2 von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -5$.
4. Bestimmen Sie den fehlenden Eigenwert $\lambda_3 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$ von A.
5. Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A an.
