

Aufgabe 1. (Punkte: 6)

1	2

Gegeben sei die Menge von 2×2 -Matrizen $M := \left\{ \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$.

1. Zeigen Sie, dass die Menge M zusammen mit dem Matrizenprodukt eine **kommutative** Gruppe ist.
2. Geben Sie einen Isomorphismus $\varphi : (M, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ an und weisen Sie die Isomorphie-Eigenschaften für φ nach.

1) Nachweis der Gruppenaxiome oder Untergruppenkriterium zu $GL(2, \mathbb{R})$

- Für $x=0$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ das neutrale Element (s.u.) $\Rightarrow M \neq \emptyset$

- (M, \cdot) abgeschlossen: Für $\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & 0 \\ 0 & e^{-(x+y)} \end{pmatrix} \in M, \text{ da } x+y \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

- $(*) \Rightarrow$ zu $\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$ ist mit $y=-x \in \mathbb{Z}$ $\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$ das Inverse in M

- $(*) \Rightarrow \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$, d.h. (M, \cdot) ist kommutativ, da $(\mathbb{Z}, +)$ kommutativ

- (M, \cdot) assoziativ (erbt von Matrixmultiplikation)

2) $\varphi: \begin{cases} (M, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}, +) \\ \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \mapsto x \end{cases}$ ist bijektiv nach Definition von φ .

da zu $x \in \mathbb{Z} \exists_1 \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \in M$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\right) = x$

φ ist Homomorphismus, da für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} e^{x+y} & 0 \\ 0 & e^{-(x+y)} \end{pmatrix}\right) = x+y = \varphi\left(\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 2. (Punkte: 12)

1	2

Multiple choice-Aufgaben zu Permutationen

Alle Elemente $f \in S_3$ der Permutationsgruppe (S_3, \circ) lassen sich in Werteschreibweise $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$ oder in Zykelschreibweise $(a \ f(a) \ \dots)$ mit $a \in \{1, 2, 3\}$ darstellen.

$U = \{id, (1\ 2)\}$ sei als eine Untergruppe der S_3 gegeben.

Kreuzen Sie bitte jeweils die richtige Aussage bzw. Antwort an. Begründungen werden nicht gewertet.

Lösung von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ist in S_3 :	<input checked="" type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{2008} =$	<input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	<input checked="" type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
Mit welchem Element $x \in S_3$ wird $\{id, (1\ 2\ 3), x\}$ zu einer Untergruppe von S_3 ?	<input type="checkbox"/> $x = (1\ 3)$	<input type="checkbox"/> $x = (2\ 3\ 1)$	<input checked="" type="checkbox"/> $x = (3\ 2\ 1)$
Wieviele verschiedene Untergruppen besitzt die S_3 ?	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input checked="" type="checkbox"/> 6
Welche Nebenklassen sind mit $[(1\ 2\ 3)]_U$ identisch?	<input type="checkbox"/> $[(1\ 3\ 2)]_U$	<input type="checkbox"/> $[(2\ 3)]_U$	<input checked="" type="checkbox"/> $[(1\ 3)]_U$
Wieviele Elemente besitzt die Faktorgruppe S_3/U ?	<input checked="" type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 6

Wertung: Für jede der 6 Teilaufgaben (Zeilen):

- 2 Punkte bei korrekter Beantwortung,
- Punktabzug bei falscher Beantwortung,
- 0 Punkte bei Nichtbearbeitung.

Anfrage: Für $x \in S_3$ setzen $[x]_U = x \circ U$

- $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (oder ausprobieren)
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{2008} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{2007} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = id \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, da „3 teilt 2007“
- $\{id, (123), x\}$ muss inverses zu (123) enthalten, also (321) bzw. enthält $(123)^2 = (132) = (321)$ und $(123)^3 = id$.
- Untergruppen von S_3 sind:
 $\{ \}, \{id, (12)\}, \{id, (13)\}, \{id, (23)\}, \{id, (123), (321)\}, S_3$ also 6
- $[(123)]_U = (123) \circ \{id, (12)\} = \{(123), (123) \circ (12)\} = \{(123), (13)\}$
- $|S_3/U| = |S_3|/|U| = 6/2 = 3$

Aufgabe 3. (Punkte: 8)

1	2

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ einer linearen Abbildung

$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto y = Ax$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie den Kern von f .
- Geben Sie $\dim(\text{Bild}(f))$ und eine Basis des Bildes von f an.
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α alle Urbilder von b , d.h. alle Lösungen von $Ax = b$.

1) Ansatz: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$

Wähle $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}, x_4 = \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = \lambda - 2\mu \wedge x_1 = -(\lambda - 2\mu) - \lambda - \mu = -2\lambda + \mu$

$\Rightarrow x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist Kern(f)

2) $\dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\text{Bild}(f)) = 4 - 2 = \underline{2}$

\Rightarrow Basis von Bild(f) ist z.B. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

3) LGS: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \alpha \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \alpha \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array} \right) \Rightarrow$

Fallunterscheidung:

$\alpha \neq 1 \Rightarrow$ keine Lösung

$\alpha = 1 \Rightarrow$ Wähle $x_3 = \lambda, x_4 = \mu \Rightarrow x_2 = 1 + \lambda - 2\mu \wedge$

$x_1 = 2 - (1 + \lambda - 2\mu) - \lambda - \mu = 1 - 2\lambda + \mu$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\text{Kern}(f)} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\text{Kern}(f)}$

← Struktur
← mögliche spezielle Lösungen

Aufgabe 4. (Punkte: 8)

1	2

Im \mathbb{R}^3 sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. Bestimme α so, dass $\text{span}(v_1, v_2, v_3)$ ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 der Dimension 2 ist, und begründen Sie Ihr Ergebnis.

2. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ gibt. Begründen Sie Ihr Ergebnis.}$$

3. Sei nun $\alpha = 0$ gewählt. Bestimmen Sie das Bild von $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ unter der linearen Abbildung f aus 2.

1) Der span ist immer ein Untervektorraum. Offensichtlich sind v_1 und v_2 linear unabhängig $\Rightarrow \dim \text{span}(v_1, v_2, v_3) \geq 2$
 $\Leftrightarrow \dim \text{span}(v_1, v_2, v_3) = 2 \Leftrightarrow v_1, v_2, v_3$ linear abhängig \Leftrightarrow

1. Weg: $\det(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 2 - 0 - \alpha - 0 = 4 - \alpha \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \underline{\alpha = 4}$

2. Weg: Ansatz: $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 1 \wedge \underline{\alpha = 4}$

2) Für $\alpha \neq 4$ sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und bilden daher eine Basis des \mathbb{R}^3 , deren Bilder $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ eine lineare Abbildung eindeutig bestimmen.

Für $\alpha = 4$ gilt $f(v_3) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \nexists f$ für $\alpha = 4$

3) Ansatz $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$

$\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 1 \Rightarrow f(v) = f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

Aufgabe 5. (Punkte: 10)

1	2

Multiple choice-Aufgaben zu Abbildungen

Welche Eigenschaften treffen auf die angegebenen Abbildungen f zu ?

Kreuzen Sie bitte **alle** richtigen Aussagen an. Begründungen werden nicht gewertet.

$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} \end{cases}$	<input type="checkbox"/> linear <input checked="" type="checkbox"/> nicht linear	<input checked="" type="checkbox"/> injektiv <input type="checkbox"/> nicht injektiv	<input type="checkbox"/> surjektiv <input checked="" type="checkbox"/> nicht surjektiv
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$	<input checked="" type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> nicht linear	<input checked="" type="checkbox"/> injektiv <input type="checkbox"/> nicht injektiv	<input checked="" type="checkbox"/> surjektiv <input type="checkbox"/> nicht surjektiv
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$	<input type="checkbox"/> linear <input checked="" type="checkbox"/> nicht linear	<input type="checkbox"/> injektiv <input checked="" type="checkbox"/> nicht injektiv <i>$f(x_1, x_2) = f(-x_2, -x_1)$</i>	<input type="checkbox"/> surjektiv <input checked="" type="checkbox"/> nicht surjektiv <i>≠ Urbild von $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$</i>
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ mit $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ und $\text{Kern}(A) = \{0\}$	<input checked="" type="checkbox"/> linear <input type="checkbox"/> nicht linear	<input checked="" type="checkbox"/> injektiv <input type="checkbox"/> nicht injektiv	<input type="checkbox"/> surjektiv <input checked="" type="checkbox"/> nicht surjektiv <i>\mathbb{R}^4 ?</i>
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ mit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\text{Kern}(A) = \{0\}$	<input type="checkbox"/> linear <input checked="" type="checkbox"/> nicht linear	<input checked="" type="checkbox"/> injektiv <input type="checkbox"/> nicht injektiv	<input checked="" type="checkbox"/> surjektiv <input type="checkbox"/> nicht surjektiv

Wertung: Für jede der 5 Teilaufgaben (Zeilen):
 2 Punkte bei korrekter Beantwortung,
 Punktabzug bei falscher Beantwortung,
 0 Punkte bei Nichtbearbeitung.

Aufgabe 6. (Punkte: 8)

1	2

Im \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{R}^{n \times n}$ der $n \times n$ -Matrizen ($n > 1$) sei

$$U = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a_{ij} = -a_{ji} \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n\}$$

1. Zeigen Sie: U ist ein Untervektorraum von $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$.
2. Zeigen Sie: $A = (a_{ij}) \in U \Rightarrow a_{ii} = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.
3. Bestimmen Sie für $n = 3$ eine Basis von U .
4. Geben Sie $\dim(U)$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ an.
5. Zeigen Sie: Für $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ gilt: $A \in U \Rightarrow \det(A) = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie $\det(A^T)$!

1) Untervektorraumskriterium mit $A \in U \Leftrightarrow A^T = -A$

• $U \neq \emptyset$, da Nullmatrix $0 \in U$ und für $A, B \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

• + abgeschlossen: $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in U$

• \cdot abgeschlossen: $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T = \lambda \cdot (-A) = -(\lambda A) = -(\lambda A) \Rightarrow \lambda A \in U$

alternativ mit $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in U, \lambda \in \mathbb{R}$

• $(a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (-a_{ji}) + (-b_{ji}) = -(a_{ji} + b_{ji}) \checkmark$

• $(\lambda a_{ij}) = \lambda(a_{ij}) = \lambda(-a_{ji}) = -(\lambda a_{ji}) \checkmark$

2) $A = (a_{ij}) \in U \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ insbesondere für $j=i$
 $\Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \underline{a_{ii} = 0} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

3) $n=3, A \in U \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

↑
offenichtlich

B spannt U auf und ist linear unabhängig.

\Rightarrow Basis von U : $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

4) Wesentliche Einträge in $A \in U$ nur oberhalb der Hauptdiagonalen

$$\Rightarrow \dim(U) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \underline{\underline{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

5) $\det(A) = \det(A^T) \stackrel{A \in U}{=} \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \underline{\underline{\det(A) = 0}}$
↑
 n ungerade

Aufgabe 7. (Punkte: 8)

1	2

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Begründen Sie, warum A invertierbar ist. Die Bestimmung von A^{-1} ist dabei nicht verlangt!
2. Zeigen Sie, dass v_1 ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1 .
3. Bestimmen Sie einen Eigenvektor v_2 von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -5$.
4. Bestimmen Sie den fehlenden Eigenwert $\lambda_3 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$ von A .
5. Geben Sie eine Basis des \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von A an.

$$1) \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-9 - 16) = -75 \neq 0 \quad \underline{\text{bzw}} \quad \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 - \frac{16}{3} \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \underline{\text{Beh.}}$$

$$2) A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+8+2 \\ 12+8 \\ 16-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 5}$$

$$3) (A - (-5)E)v_2 = 0 : \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \mu \in \mathbb{R}$$

$$4) \underline{1. \text{Weg}}: \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det(A) = -75 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = 3} \quad (\text{mit } \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -5)$$

$$\underline{2. \text{Weg}}: \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{spur}(A) = 3 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = 3}$$

$$\underline{3. \text{Weg}}: \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_3 = 3} \quad (\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5) \text{ wird nicht benötigt!})$$

$$5) \text{Basis aus Eigenvektoren: } B = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

↑
offensichtlich EV zu EW $\lambda_3 = 3$