6.2 Ähnliche Matrizen

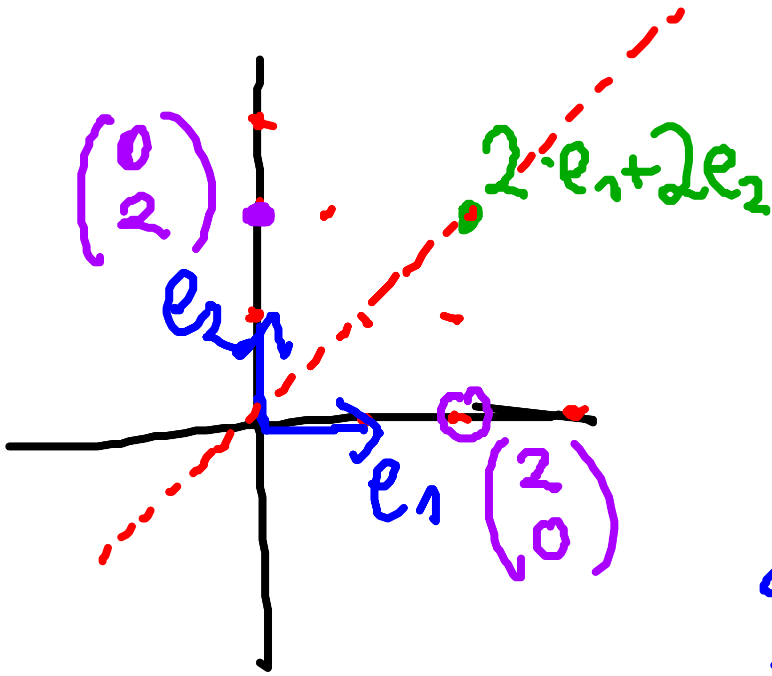
Def.: Zwei Matrizen $A \in K^{n \cdot n}$, $B \in K^{n \cdot n}$ heißen ähnlich falls eine invertierbare Matrix S existiert mit $\underline{A = SBS^{-1}}$

A und B beschreiben die gleiche Aktion in verschiedenen Koordinatensystemen

Bsp

1. Basis

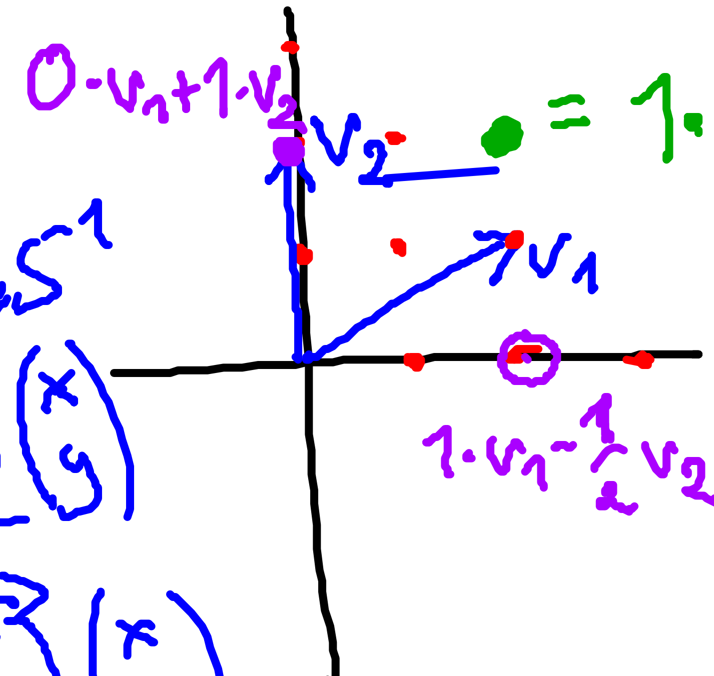
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Basis

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$



$= 1 \cdot v_1 + \frac{1}{2} v_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{S^{-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S$$

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bzgl. Basis 1

Spiegelung an der Winkelhalbierenden

$$S \cdot A \cdot S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Was bleibt unter Ähnlichkeitstrafos gleich

- Determinante

  $\det(A) = \det(S \cdot B \cdot S^{-1}) = \det(S) \cdot \det(B) \cdot \det(S^{-1})$

  $= \det(B)$

- Spur: Summe der Diagonalelemente

  $\operatorname{spur}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \operatorname{spur}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$

- Eigenwerte

- charakteristisches Polynom

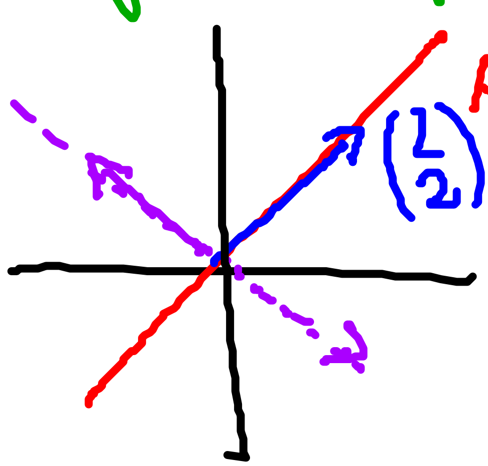
gleich

6.3 Eigenwerte / Eigenvektoren

Def Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix über K. $\lambda \in K$ heißt <u>Eigenwert</u> falls es ein $v \in K^n$ gibt mit $v \neq 0$ und $A \cdot v = \lambda v$. Der Vektor v heißt dann <u>Eigenvektor</u> zum Eigenwert λ.

Ein Eigenvektor wird durch A auf das λ-fache seinen Selbst abgebildet.

Beispiel Spiegelung:



$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Eigenwert 1: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Eigenwert -1: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Satz Ähnliche Matrizen haben identische Eigenwerte.

Bew Sei λ EW von B mit $Bv = \lambda v$, $v \neq 0$ und sei $A = SBS^{-1}$

Sei $v' = Sv$ $\Rightarrow$

$$\underline{A \cdot v'} = \underbrace{SBS^{-1}}_{A} \cdot \underbrace{Sv}_{v'} = SB \cdot v$$

$$= S \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \underbrace{S \cdot v}_{v'} = \underline{\lambda \cdot v'}$$

Wie berechnet man Eigenwerte

Sei $p_A = \det(A - \lambda E_n) \in K[\lambda]$

Dieses Polynom ist das charakteristische Polynom von A

Satz Die Nullstellen von p_A sind die EW von A

Bew Sei λ Eigenwert von A

$\Leftrightarrow \exists\, v \neq 0$ mit $A \cdot v = \lambda \cdot v$

$\Leftrightarrow \exists\, v \neq 0$ mit $(A - \lambda E_n) \cdot v = 0$

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

Satz Für ähnliche Matrizen A, B gilt $p_A = p_B$

Bew
$$\underbrace{\det(A-\lambda E)}_{p_A} = \det(\overbrace{SBS^{-1}}^{A} - \lambda \overbrace{SES^{-1}}^{E})$$
$$= \det(S \cdot (B-\lambda E) \cdot S^{-1})$$
$$= \det(S) \cdot \det(B-\lambda E) \cdot \det(S^{-1})$$
$$= \underbrace{\det(B-\lambda E)}_{p_B}$$

Beispiel: Berechne EW und EV von $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 4 - 6$$
$$- (1-\lambda)\cdot 2 - (2-\lambda)\cdot 6 + (2-\lambda)\cdot 2$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 \cdot 5 - \lambda(4+2+2) + 4 + 4 - 6$$
$$\lambda\cdot(2+6-2) - 2 - 12 + 4$$
$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8$$

spur det

Nullst. von $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8$ sind $-1, 2, 8$

$\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist EV zu $\lambda = -1$

Diagonalisierbarkeit:

A heißt diagonalisierbar falls A eine Basis aus Eigenvektoren besitzt.

Sei $v_1, \dots, v_n$ Eine Basis aus EV von A zugehörige Eigenwerte $\lambda_1 \dots \lambda_n$.

Sei $S^{-1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = S \cdot A \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \quad \text{Folgerung}}$

Anwendungen von Eigenvektoren / Eigenwerten

- Diagonalisieren
- Hauptachsentransformation
- Fixpunkte von Bewegungen
- Bestimmung von „ungefähren Lösungen" bei verrauschten Daten
- Lineare Differentialgleichungssysteme