Nächste Woche

Mo Vorlesung im HS 1

Di Zentralübung MW 0001

Do Weihnachtsvorlesung

- „Was hat Findet Nemo mit LAzutun“
- Pflanzenmodellierung auf Comp. XXL
- Rubiks Cube + Gruppen
- Cinderella Demo XXL

Determinanten

$\det(A)$ für $n \times n$ Matrix A

ist Polynom $\det : K^{n \cdot n} \to K$

(i) normiert $\det(E_n) = 1$
(ii) multilinear in jeder Spalte
(iii) alternierend

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit + Existenz

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \cdot \prod a_{\pi(i),i}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \end{pmatrix}$$

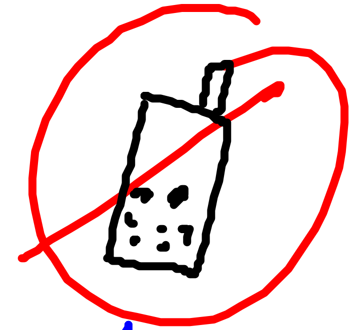
Rechenregeln für Determinanten:

(i) $\det(A) = \det(A^T)$

„Bew": In der Summenformel produzieren A und A^T genau die gleichen Summanden mit gleichem Vorz.

(ii) det ist linear in jeder Zeile
det ist alternierend bzgl. Zeilenvertauschung

Bew: folgt direkt aus (i)

(iii) Zeilenumformungen und det 

I. Vertausch zweier Zeilen ändert nur das Vorz.

II. Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert Wert von det nicht

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ - z_i - \\ \vdots \\ - z_j + \lambda z_i - \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ - z_i - \\ \vdots \\ - z_j - \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\det\begin{pmatrix} \vdots \\ - z_i - \\ \vdots \\ - z_i - \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=0}$$

III. Multipliziert man eine Zeile mit $\lambda \neq 0$ gilt:

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ - \lambda z_i - \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} \vdots \\ z_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$

(iv) $\operatorname{rang}(A) < n \Rightarrow \det(A) = 0$

Bew: $\operatorname{rang}(A) < n \Rightarrow$ Spalten sind lin. abh. $\Rightarrow \det(A) = 0$

(v) $\operatorname{rang}(A) = n \Rightarrow \det(A) \neq 0$

Bew aus $\operatorname{rang}(A) = n \Rightarrow$ Man kann A durch Zeilenumf. von Typ I ... III auf die Einheitsmatrix bringen.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Bei jedem Schritt wird } \det \text{ mit einem Faktor} \\ \lambda \neq 0 \text{ multipliziert} \\ \det(E_n) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

(vi) Produktsatz: Sei A, B $n \times n$ Matrix dann gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

<u>Bew</u>: Fall 1 $\operatorname{rang}(B) < n \Rightarrow \operatorname{rang}(A \cdot B) < n$

$\Downarrow$ $\det(B) = 0$ $\qquad$ $\Downarrow$ $\det(A \cdot B) = 0$

Fall 2: $\operatorname{rang}(B) = n \Rightarrow \det(B) \neq 0$

Betrachte $\delta(A) = \dfrac{\det(A \cdot B)}{\det(B)}$

$\delta(E_n) = \dfrac{\det(E_n \cdot B)}{\det(B)} = 1$

$\delta(A)$ alternierend

$\delta(A)$ multilinear

$\Rightarrow \delta(A) = \det(A)$

$\Rightarrow \det(A) = \dfrac{\det(A \cdot B)}{\det(B)}$

$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B)$

Drei Eigenschaften

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(E_n) = 1$
- $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

$\det : GL(n,K) \to K - \{0\}$ ist Gruppenhomomorphismus

$GL(n,K)$ die Gruppe aller invertierbaren $\underbrace{\text{Matrizen}}_{n \times n}$ über Körper K

mit Matrizenmultiplikation als Verknüpfung

Berechnungsformeln für Determinanten:

① Summiere $n!$ Produkte (hoffnungslos langsam)

② Spezialfall

(i) $\det \begin{pmatrix} d_1 & & & * \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$

(ii) $\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \end{pmatrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

③ Determinante mittels Gauss Alg.

Ziel: Berechne $\det(A)$

Verfahren: Bringe A auf Dreiecksform $\left(\begin{smallmatrix} & \diagdown \\ 0 & \end{smallmatrix}\right)$

Durch Operationen der folgenden Art

(i) Addiere das Vielfache einer Zeile zu einer Anderen — Ändert det nicht

(ii) Zeilen oder Spaltentausch — Kehrt das Vorzeichen um.

$\rightarrow$ Berechne $\det\left(\begin{smallmatrix} & \diagdown \\ 0 & \end{smallmatrix}\right)$

<u>Bsp</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$Z_2 \Leftarrow Z_2 - \frac{1}{2} Z_1$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ \boxed{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $Z_3 \Leftarrow Z_3 - Z_1$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 \end{pmatrix}$ $Z_3 \Leftarrow Z_3 - 4 Z_2$

det $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1/2} & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$

Probe

$4 - 3 - 2 + 2$

$= 1$

4 Spaltenentwicklung (Zeilenentwicklung)

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Bsp

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{a} & b & c \\ \boxed{d} & e & f \\ \boxed{g} & h & i \end{pmatrix} = a(ei - fh) + d(hc - bi) + g(bf - ec)$$

$$= a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d \cdot \det \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g \cdot \det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{e} & \boxed{f} \\ \cdot & \boxed{h} & \boxed{i} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \boxed{b} & \boxed{c} \\ d & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{h} & \boxed{i} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \boxed{b} & \boxed{c} \\ \cdot & \boxed{e} & \boxed{f} \\ g & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Allgemein:

Sei A_{ij} $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{ij} & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ die Matrix die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A entsteht.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i1} \cdot \det(A_{i1}) \cdot (-1)^{i+1} \right)$$

Entwicklung nach erster Spalte.

Allgemein $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \cdot (-1)^{i+j}$

Entwicklung nach j-ten Spalte.

Determinanten und Gleichungssysteme:

<u>Bsp</u> $n=3$ $\quad a_1, a_2, a_3 \in K^3, \; b \in K^3$

Löse $\quad \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = b$

Betrachte Fall der Eindeutigen Lösbarkeit

Betrachte $\det(\underset{\text{fest}}{a_1}, \underset{\text{fest}}{a_2}, \underset{\text{variabel}}{y})$ als Fkt von $K^3 \to K$

$$\det(a_1, a_2, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) = \det(a_1, a_2, b)$$

$$= \underbrace{\det(a_1, a_2, a_1)}_{=0} \cdot \lambda_1 + \underbrace{\det(a_1, a_2, a_2)}_{=0} \cdot \lambda_2 + \det(a_1, a_2, a_3)\lambda_3 = \det(a_1, a_2, b)$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{\det(a_1, a_2, b)}{\det(a_1, a_2, a_3)}$$

$$\lambda_1 = \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det(a_1, a_2, a_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{\det(a_1, b, a_3)}{\det(a_1, a_2, a_3)}$$

CRAMER'SCHE Regel

Allgemein im K^n

Löse $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = b$

b an stelle von a_i

$$\lambda_i = \frac{\det(a_1 \dots a_{i-1}, b, a_{i+1} \dots a_n)}{\det(a_1, a_2 \dots a_n)}$$