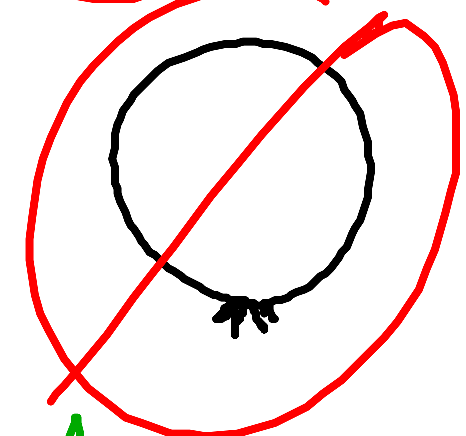
5.4 Inverse einer Matrix

$a \cdot x = b$

$x = a^{-1} \cdot b$



Inverse einer $n \times n$ Matrix A.
gesucht A^{-1} mit $A \cdot \underline{\underline{A^{-1}}} = E_n$

Wann existiert A^{-1} ? $\Rightarrow$ Determinanten

Wichtig: Inversenberechnung ist oftmals gutes Preprocessing zum LGS lösen.

Aufgabe $Ax = b$ lösen, A fest, b variabel

Wenn A invertierbar dann $x = A^{-1} b$

Dann: $Ax = b \Rightarrow A^{-1} A x = A^{-1} b \Rightarrow E_n x = A^{-1} b$

$\Rightarrow x = A^{-1} b$

Kriterien für Invertierbarkeit:

Sei A eine $n \times n$ Matrix mit zugeh. Abb. $f: K^n \to K^n$

Die folgenden Aussagen sind gleichwertig.

(i) A ist invertierbar

(ii) $\mathrm{Bild}(f) = K^n$

(iii) $\mathrm{rang}(A) = n$

(iv) Spalten von A sind lin. unabh.

(v) Zeilen von A sind lin. unabh.

(vi) $\mathrm{Kern}(f) = 0$

(vii) $Ax = 0$ eindeutig lösbar

(viii) $Ax = b$ für alle b eindeutig lösbar

(ix) $\det(A) \neq 0$ (später)

Inversenberechnung:

Gesucht A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = E_n$

$$\begin{pmatrix} \\ & A & \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Löse gleichzeitig n LGS $A \cdot x_i = e_i$

Lösung für beliebiges $A \cdot x = b$ wird Linearkomb. aus den n obigen Lösungen

$b = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ Löse $Ax = b$

$\Rightarrow$ Lösung $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \dots + \lambda_n \cdot x_n = A^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Begründung $Ax = A(\lambda_1 x_1 \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = b$

Invertiere!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = E_n$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad Z_3 \leftarrow Z_3 + 2Z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \boxed{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-3} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} Z_1 \leftarrow Z_1 + 3Z_3 \\ Z_2 \leftarrow Z_2 - 3Z_3 \\ Z_3 \leftarrow -Z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{2} & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \qquad Z_1 \leftarrow Z_1 - 2Z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

⑥ „Determinanten und Eigenvektoren eine pragmatische Einführung ohne viele Beweise"

6.1 Determinanten

Sei A eine $n \times n$ Matrix

Wir können A als Element im $K^{n \cdot n}$ auffassen. Die Determinante ist ein bestimmtes Polynom in den Einträgen von A.

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \in K^{3\cdot 3} = K^9$$

$$\det : K^{n\cdot n} \to K$$

$$\det(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}) \in K[x_{11}, \dots x_{nn}]$$

Bsp $n=2$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\cdot d - c\cdot b$$

$n=3$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - bdi - ceg - afh$$

Abk: $\det\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \det(\overbrace{a_1 \dots a_n}^{\text{Spaltenvektoren}})$

Drei charakteristische Eigenschaften der det.

(i) $\det(e_1 \dots e_n) = 1$ (normiert)

(ii) det ist linear in jeder Spalte d.h.: (multilinear)

- $\det(a_1 \dots \lambda a_i \dots a_n) = \lambda \cdot \det(a_1 \dots a_i \dots a_n)$
- $\det(a_1 \dots a_i + a_i' \dots a_n) = \det(a_1 \dots a_i \dots a_n) + \det(a_1 \dots a_i' \dots a_n)$

(iii) det ist antikommutativ (alternierend)

$\det(a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_n) = -\det(a_1 \dots \underbrace{a_j \dots a_i}_{\text{a_i und a_j vertauschen}} \dots a_n)$

Einfache Folgerungen

(i) Sei $a_i = a_j$ für $i \neq j$ (Zwei Spalten sind identisch)

$$\det(a_1 \ldots \underbrace{a_i \ldots a_j}_{=} \ldots a_n) = 0$$

<u>Bew</u> $\det(a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n) = -\det(a_1 \ldots a_j \ldots a_i \ldots a_n)$

$$= -\det(a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n)$$

$$\Rightarrow \det(\ldots) = 0$$

(ii) Ist a_n Linearkombination von $a_1 .. a_{n-1}$

$\Rightarrow \det(a_1 .... a_n) = 0$

<u>Bew</u> Sei $a_n = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_{n-1} a_{n-1}$

$\det(a_1 .... a_{n-1}, \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_{n-1} a_{n-1})$

$= \lambda_1 \det(\underline{a_1}, ... a_{n-1}, \underline{a_1})$

$+ \lambda_2 \det(a_1, \underline{a_2}, ... a_{n-1}, \underline{a_2})$

$\vdots$

$+ \lambda_{n-1} \det(a_1, a_2, ... \underline{a_{n-1}}, \underline{a_{n-1}})$

$= 0 + 0 + ... + 0 = 0$

Die drei Eigenschaften (normiert, alternierend, multilinear) bestimmen die Determinante eindeutig.

Bsp $n=2$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det(ae_1+ce_2,\ be_1+de_2)$$

$$= \det(ae_1,\ be_1+de_2) + \det(ce_2,\ be_1+de_2)$$

$$= \det(ae_1, be_1) + \det(ae_1, de_2) + \det(ce_2, be_1) + \det(ce_2, de_2)$$

$$= a\cdot b\cdot \underbrace{\det(e_1,e_1)}_{=0} + a\cdot d\cdot\det(e_1,e_2) + c\cdot b\det(e_2 e_1) + c\cdot d\,\underbrace{\det(e_2,e_2)}_{=0}$$

$$= a\cdot d\cdot \underbrace{\det(e_1,e_2)}_{=1} - c\cdot b\,\underbrace{\det(e_1 e_2)}_{=1}$$

$$= \underline{a\cdot d} - \underline{c\cdot b}$$

Allg. Struktur zur Determinantenberechnung:

- Summanden sind vorzeichenbehaftetes Produkt von n Matrixeinträgen, einer aus jeder Spalte
- Die Einträge müssen so gewählt werden, dass für jeden Summanden auch genau einer aus jeder Zeile kommt

$$\begin{pmatrix} \cdot & \boxed{b} & \cdot & \cdot \\ \boxed{a} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{c} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \boxed{d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}$$

$\pm\, abcd$ Summand in der Det

Vorzeichen ist $\operatorname{sign}(\pi)$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$$

Det hat insgesamt $n!$ Summanden.

Allgemeine Formel für Determinante:

A sei $n \times n$ Matrix $\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i}$$

Bsp $n = 3$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & \cdot \\ \cdot & \cdot & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & f \\ \cdot & h & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & b & \cdot \\ d & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & c \\ d & \cdot & \cdot \\ \cdot & h & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & f \\ g & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & c \\ \cdot & e & \cdot \\ g & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$+ \, dei - afh - dbi + dhc + bgf - gec$$

Merkregel für 3×3

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right)$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

$$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Achtung: funktioniert nur für 3×3

Summanden

$n = 1 \to 1$

$n = 2 \to 2$

$n = 3 \to 6$

$n = 4 \to 24$

$n = 5 \to 120$

$n = 6 \to 720$

$\vdots$