Gleichungssysteme lösen

Gegeben: Matrix $M \in K^{m \times n}$

m - Zeilen
n - Spalten

Vektor $b \in K^m$

Gesucht: alle $x \in K^n$ mit $\boxed{Mx = b}$

$$f_M : K^n \to K^m$$
$$x \mapsto Mx$$

$(\text{Lös}_{f_M, b} =)$

$$\text{Lös}_{M,b} = \{x \mid f_M(x) = b\}$$
$$= \{x \mid Mx = b\}$$

Homogene LGS: $Mx = \underline{\underline{0}}$

$f_M: K^n \to K^m$

$Lös_{M,0} = \{x \in K^n \mid f_M(x) = 0\} = \mathrm{Kern}(f_M)$

$\Rightarrow Lös_{M,0}$ ist Vektorraum

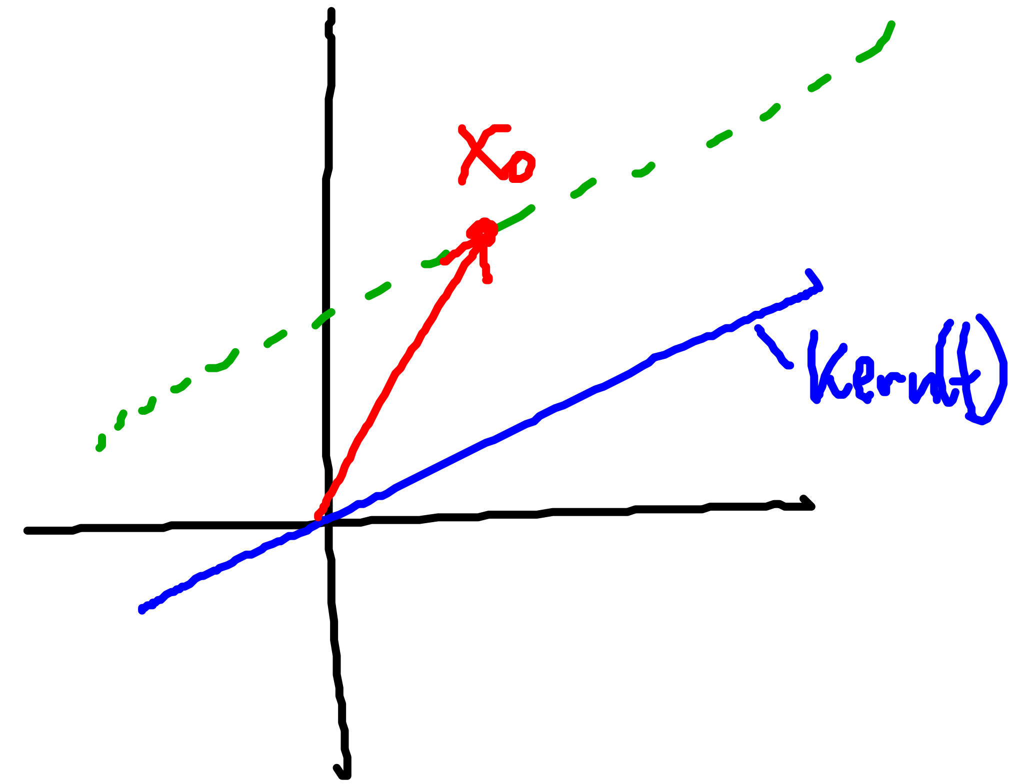
nicht-triviale Lösungen g.d.w. die Spalten von M linear abhängig sind

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Inhomogene LGS: $Mx = b$ $\quad b \neq 0$

$\text{Lös}_{M,b} = \{ x \in K^n \mid f_M(x) = b \}$

<u>Satz</u>: Die Lösungsmenge $\text{Lös}_{M,b}$ hat die Form $x_0 + \text{Kern}(f_M)$ für ein beliebiges x_0 mit $f_M(x_0) = b$



<u>Bew</u> $\text{Lös}_{f,b} \subseteq x_0 + \text{Kern}(f)$

$$\boxed{\text{Sei } f(x_0) = b}$$

$x \in \text{Lös}_{f,b} \Rightarrow f(x) = b$

$\Rightarrow f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = b - b = 0$

$\Rightarrow x - x_0 \in \text{Kern}(f)$

$\Rightarrow x = x_0 + k$ mit $k \in \text{Kern}(f)$

$\text{Lös}_{f,b} \supseteq x_0 + \text{Kern}(f)$

Sei $x = x_0 + k$ mit $k \in \text{Kern}(f)$

$$\underline{\underline{f(x)}} = f(x_0 + k) = f(x_0) + f(k) = b + 0 = \underline{\underline{b}}$$

$\Rightarrow x \in \text{Lös}_{f,b}$

<u>Satz</u> (i) $f_M(x) = b$ nur dann lösbar wenn $b \in \mathrm{Bild}(f_M)$.

Bew: Definition von $\mathrm{Bild}(f_M)$

(ii) $f(x) = b$ ist eindeutig lösbar wenn $b \in \mathrm{Bild}(f)$ und $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 0$

<u>Bew</u> klar wegen vorherigen Satz

$$\mathrm{Lös}_{f,b} = x_0 + \mathrm{Kern}(f)$$

Rang einer Matrix

Spaltenrang $M = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$\text{spaltenrang}(M) = \dim(\text{span}(v_1, \ldots, v_n))$

(= Anzahl der Vektoren in einer maximalen linear unabh. Menge von Spalten)

Zeilenrang $M = \begin{pmatrix} — & w_1 & — \\ & \vdots & \\ — & w_m & — \end{pmatrix}$

$\text{zeilenrang}(M) = \dim(\text{span}(w_1, \ldots, w_n))$

(= max Anz. lin. unabh. Zeilenvektoren)

Satz Sei M eine $m \times n$ Matrix mit zugehörigen Abbildung $f_M : K^n \to K^m$ dann gilt:

$$\text{zeilenrang}(M) \overset{(ii)}{=} \text{spaltenrang}(M) \overset{(i)}{=} \dim(\text{Bild}(f))$$

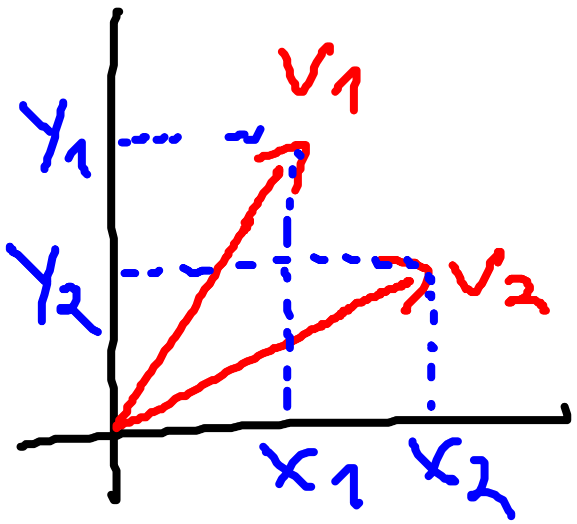
Bew (i) Folgt direkt aus Definition von Bild(f)

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(ii) nicht trivial

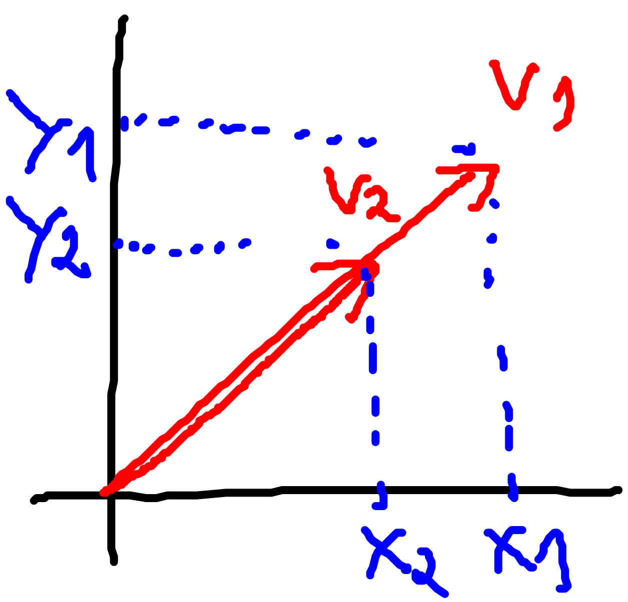
Beispiel

M sei 2×2 Matrix über $\mathbb{R}$



$$\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} — w_1 — \\ — w_2 — \end{pmatrix}$$

Angenommen $v_1 = \lambda v_2$ $\quad \lambda \neq 0$



$\Rightarrow \exists \mu$ mit

$$x_1 \cdot \mu = y_1$$

$$x_2 \cdot \mu = y_2$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ lin abh.

Bsp.

$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & \cdots & & & v_5 \\ \hline w_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ w_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ w_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$\text{span}(v_1 \dots v_5)$

$= \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow$ spaltenrang $= 2$

$w_1 = w_2 + w_3 \Rightarrow$ zeilenrang $= 2$

<u>Bsp</u>

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

maximaler Rang ist 3

$\Rightarrow \dim(\text{Bild}(f)) \leq 3$

$\Rightarrow \dim(\text{Kern}(f)) \geq 2$

Bsp

$$n\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} & M & \end{pmatrix}}_{n}\right. \begin{pmatrix} | \\ x \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ b \\ | \end{pmatrix}$$

quadratische $n \times n$ Matrix

Eindeutig lösbar g.d.w.

$$\operatorname{rang}(M) = n$$

„Bew"

$\operatorname{rang}(M) = n \Longleftrightarrow$ Spalten sind Basis des K^n

Kriterium für Lösbarkeit eines LGS:

$Mx = b$ ist lösbar g.d.w

$$\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}\underbrace{(M, b)}_{\operatorname{rang}\begin{pmatrix} | & & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n & b \\ | & & | & | \end{pmatrix}}$$

<u>Bew</u> $Mx = b$ lösbar

$\Leftrightarrow$ b ist Linearkombination der Spalten $v_1, \dots, v_n$ von M

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n, b)$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(M, b)$

5.3 Rechnen mit Matrizen

A, B seien $m \times n$ Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

I

$\lambda \in K$

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

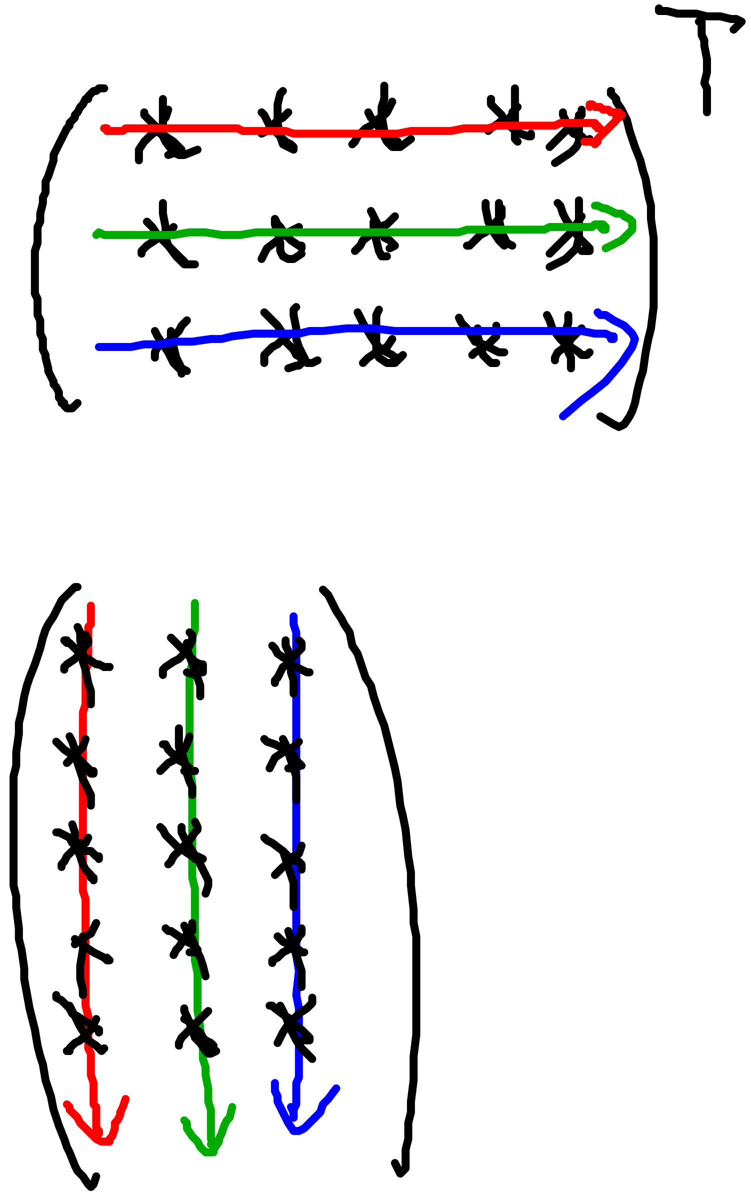
Menge der $m \times n$ Matrizen sind Vektorraum

I Transposition

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m \times n \text{ Matrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad n \times m \text{ Matrix}$$

Vertauschen von Zeilen/Spalten



III Matrizen Multiplikation

$$
m\left(\begin{array}{c} \overbrace{\text{———}\; a_1 \;\text{———}}^{n} \\ \\ \text{———}\; a_m \;\text{———} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} | & | \\ c_1 & c_k \\ | & | \end{array}\right)_{\underbrace{\qquad\qquad}_{k}} n = \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \text{-- -- --}\; d_{ij} \;\text{-- -- --} \\ \vdots \end{array}\right)_{\underbrace{\qquad}_{k}} m
$$

d_{ij} = siehe von 4 Vorlesung

IV Einheitsmatrix

$$E_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\} n$$

simuliert Identitätsabb.

$K^n \to K^n$

$x \mapsto x$

Bsp $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

V Inverse:

Seien A, A' $n \times n$ Matrizen

gilt $A \cdot A' = E_n$ so heißt A' Inverse zu A

A nennt man invertierbar falls eine Inverse existiert. Man schreibt dann $A^{-1} := A'$

Rechenregeln für Matrizen

$A: m \times n$

$B: n \times k$

$C: k \times r$

$B': n \times k$

(i) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(ii) $A \cdot E_n = A$; $E_m \cdot A = A$

(iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(iv) $B + B' = B' + B$

(v) $A \cdot (B + B') = AB + AB'$

$(B + B') \cdot C = B \cdot C + B' C$

Achtung Es gilt im Allgemeinen NICHT

$A \cdot B = B \cdot A$

Sei $m = n = k$, A, B invertierbar

(vi) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

(vii) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Bew für (vii)

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})$$

$$= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E_n \cdot A^{-1}$$

$$= A \cdot A^{-1} = E_n$$