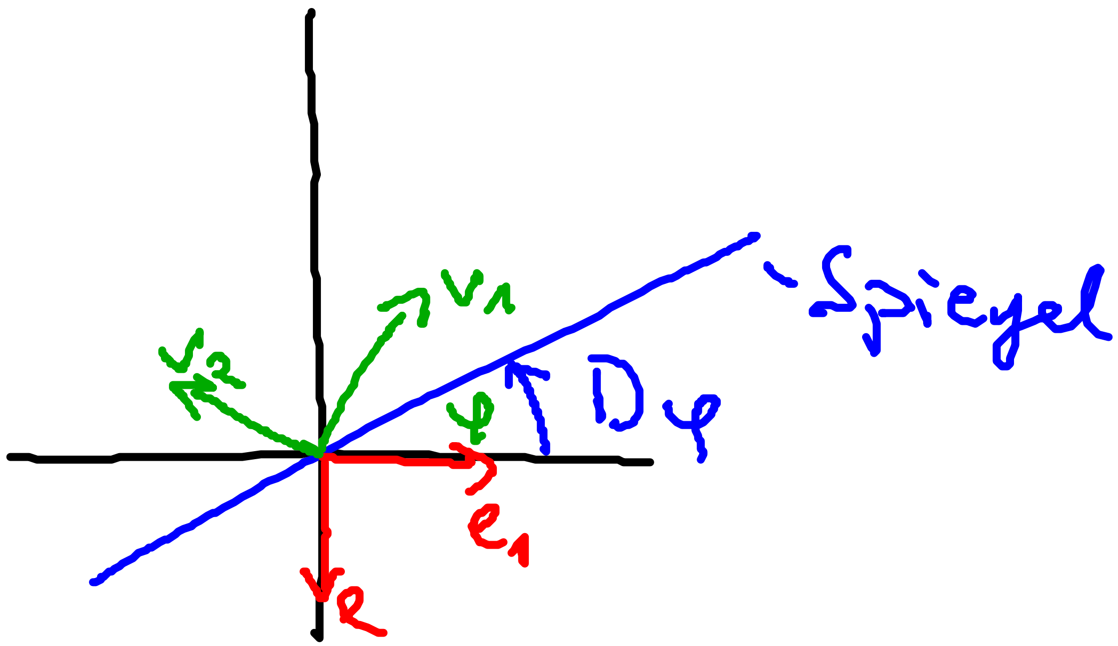


1. Methode:

$$D_\varphi\left(S_x \cdot \left(D_{-\varphi}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\left(D_\varphi \cdot \left(S_x \cdot D_{-\varphi}\right)\right)}_{M} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Def für Matrizenmulti

$$A\cdot(B\cdot v) =: (A\cdot B)\cdot v$$
$$\forall v \in V$$

2. Methode

Bilder der Einheitsvektors sind Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

Hintereinanderausführung von 2x2 Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'x + b'y \\ c'x + d'y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \cdot a' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \cdot a' \cdot x + ab'y + bc'x + bd'y \\ ca' \cdot x + cb' \cdot y + dc'x + dd'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation allgemein

$$r\ \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \cdots & z_j & \cdots \end{pmatrix}}^{n}}_{g}\ \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ s_i \\ \vdots \end{pmatrix}}^{k}}_{f}\ n = j\ \overbrace{\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ji} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}}^{k}\ r$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ s_1 & \cdots & s_k \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ M \cdot s_1 & \cdots & M \cdot s_k \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$f: K^k \to K^n$

$g: K^n \to K^r$

$(g \circ f): K^k \to K^r$

$z_j = (w_1 \ldots w_n)$

$s_i = (v_1 \ldots v_n)$

$a_{ji} = v_1 w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n$

5.1 Lineare Gleichungssysteme

Wichtige Tatsache

I gilt: $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = A$

II und $b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n = B$

III so gilt auch: $(\lambda \cdot a_1 + b_1) x_1 + \ldots + (\lambda a_n + b_n) x_n = \lambda A + B$

Konkret: aus $3x + 4y - z = 8$ $\quad | \lambda = -2$

und $6x + 11y = 23$

folgt $0x + 3y + 2z = 7$

I & II ist gleichwertig zu III & I

Beispiele ①

$$\begin{aligned} 3x + 4\underset{=1}{y} - \underset{=2}{z} &= 8 \\ 3y + 2\underset{=2}{z} &= 7 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Dreiecksform

$x = 2$
$y = 1$
$z = 2$

Lösen durch Rückwärtseinsetzen

②
$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 8 \\ 6x + 11y &= 23 \\ 3x + y - z &= 5 \end{aligned}$$

Übersichtlicher

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 6 & 11 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ \boxed{0} & 3 & 2 \\ \boxed{0} & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ \boxed{0} & 3 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

N

Mehr Beispiele

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unendlich viele Lösungen

z = beliebig

$3y = 7 - 2z$

$3x = 8 - 4y + z$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$0x + 0y + 0z = 8 \Rightarrow$

Keine Lösungen

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unendlich viele Lösungen

z = beliebig

$3y = -2z$

$3x = -4y + z$

$\text{Lös} = \operatorname{Kern}(f_M)$

Elementare Zeilenumformungen:

Satz Die folgenden Operationen ändern nichts an der Lösbarkeit und Lösungsgesamtheit eines linearen Gleichungssystems (LGS)

(i) Vertauschen zweier Zeilen (Bew klar)

(ii) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$

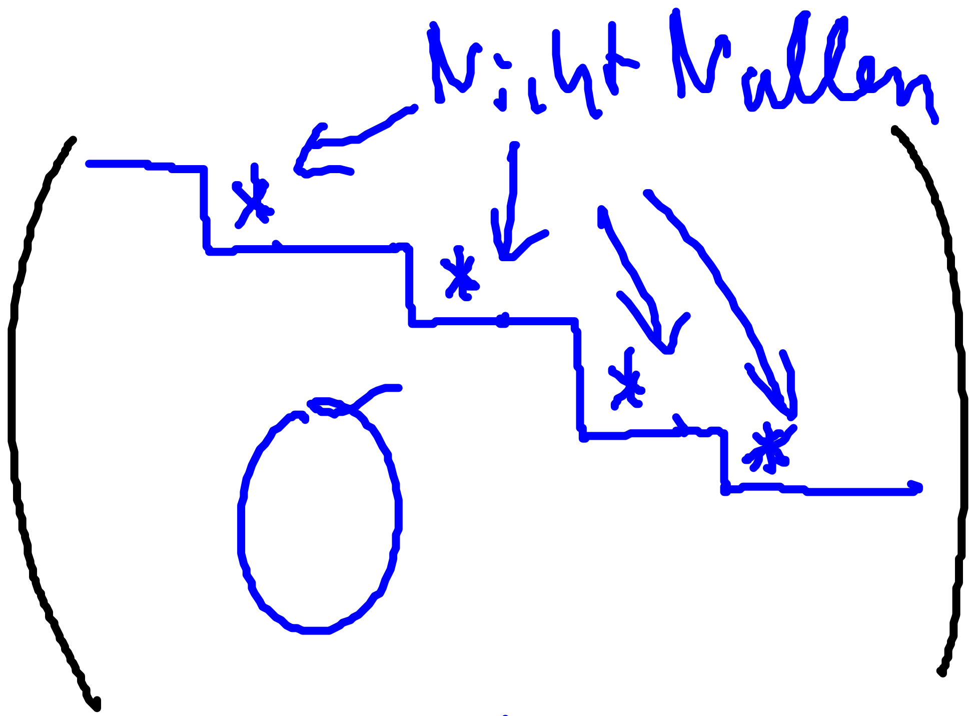
(iii) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Bew (ii): Sei $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$ die Originalzeile und sei $\lambda \neq 0$

$$\cdot\lambda \downarrow \quad \uparrow \cdot \tfrac{1}{\lambda}$$

$$\lambda a_1 x_1 + \ldots + \lambda a_n x_n = \lambda b$$

Durch sukzessives Hintereinanderausführen von Elementaren Zeilenumformungen vom Typ (i)-(iii) ~~und Spaltentausch~~ kann jedes LGS auf Zeilenstufenform gebracht werden.



jede Zeile hat mehr führende Nullen als die vorherige

→ Gaußalgorithmus

Durch Rückwärtseinsetzen lösbar

ACHTUNG

- Rundungsfehler sensitiv
- Anzahl der Operationen $O(n^3)$

5.2 Strukturelles beim Lösen von LGS

$$\begin{array}{c|c} & n \\ \hline m & \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

gesucht

$$\{x \in K^n \mid A \cdot x = b\}$$

$$= \{x \in K^n \mid f_A(x) = b\}$$

$$= \underbrace{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots x_n v_n}_{\substack{\text{lineare Funktion} \\ f: K^n \to K^m}} = b$$

Homogene LGS

$f: K^n \to K^m$

$\text{Lös}_f := \{ x \in K^n \mid f(x) = 0 \} = \text{kern}(f)$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein Vektorraum

- Insbesondere $0 \in \text{Lös}_f$
- Sind $a, b \in \text{Lös}_f \Rightarrow a + b \in \text{Lös}_f$
- Ist $a \in \text{Lös}_f \Rightarrow \lambda a \in \text{Lös}_f$
- Nicht triviale Lösunge existieren genau dann wenn Spalten der Matrix linear abhängig

Lös_f am besten durch Angabe einer Basis beschreibe