Klausuranmeldung:

https//www-m10.ma.tum.de/klausuranmeldung

Deadline 3.2.

Lineare Abbildungen:

V, W sind K-Vektorräume

$f: V \to W$

mit $\boxed{\begin{array}{l} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \end{array}}$

Folgerung:

$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$

$= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$

Lineare Abb. ist durch die Bilder der Basisvektoren festgelegt.

Beispiel: lineare Abb. für unendl. dimensionalen Vektorraum.

$$\mathbb{R}[x] = V = W$$

Ableiten:

$$(1)' = 0$$
$$(x)' = 1$$
$$(x^2) = 2x$$
$$(x^3) = 3x^2$$
$$\vdots$$

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$
$$\mapsto 0 + a_1 + 2a_2 x + \ldots n a_n x^{n-1}$$

$$D: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$
$$g(x) \to g'(x)$$

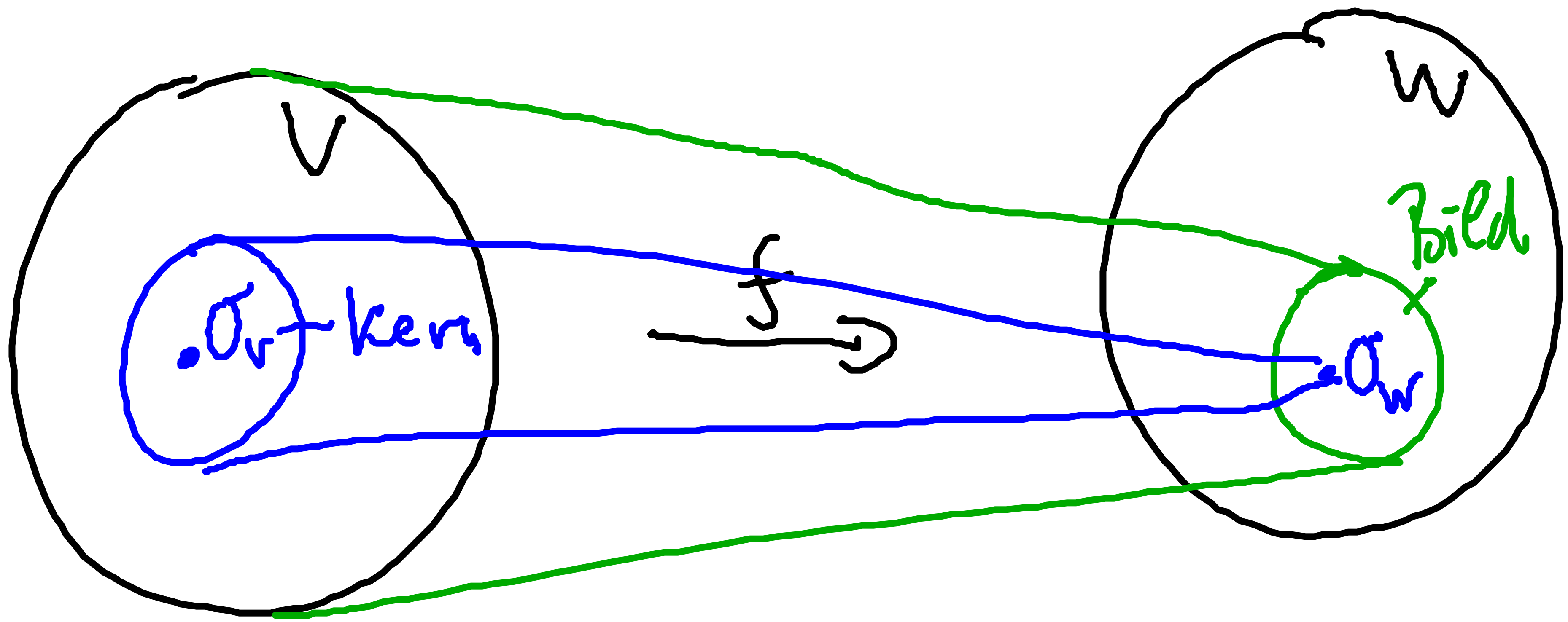
Eigenschaften

- $\underline{D(\lambda \cdot g(x))} = (\lambda \cdot g(x))' = \lambda \cdot (g'(x)) = \underline{\lambda \cdot D(g(x))}$
- $\underline{D(g(x) + h(x))} = (g(x) + h(x))' = g'(x) + h'(x) = \underline{D(g(x)) + D(h(x))}$

Def $f: V \to W$ lin. Abb.

$$\mathrm{Kern}(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} \subseteq V$$

$$\mathrm{Bild}(f) = \{ f(v) \mid v \in V \} \subseteq W$$



Satz Sei $f: V \to W$ eine lin. Abb.

(i) $\mathrm{Kern}(f)$ ist Untervektorraum von V

(ii) $\mathrm{Bild}(f)$ ist Untervektorraum von W

Bew (i) Sei $v_1, v_2 \in \mathrm{Kern}$, $\lambda \in K$

$f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$ ✓

$f(\lambda \cdot v_1) = \lambda f(v_1) = \lambda \cdot 0 = 0$ ✓

(ii) $w_1, w_2 \in \mathrm{Bild}(f)$ mit $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$

$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1+v_2) \in \mathrm{Bild}(f)$

$\lambda \cdot w_1 = \lambda \cdot f(v_1) = f(\lambda \cdot v_1) \in \mathrm{Bild}(f)$

Elementare Eigenschaften II

(iv) $v_1, \dots, v_n$ lin Abh. in $V \Rightarrow$
$f(v_1), \dots, f(v_n)$ lin Abh. in W

Bew $0_V = \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n$ ⟵ nicht triv. lin komb. also mind ein $\lambda_i \neq 0$

$f \downarrow$

$0_W = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$

(v) $f(v_1), \dots, f(v_n)$ lin unabh.
$\Rightarrow v_1 \dots v_n$ linear unabh.

Bew aus (iv)

(vi) Sei V, W endlich erzeugt
$\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \dim(V)$

⟵ Das ist verallgemeinerbar

<u>Ziel:</u> Dimensionssatz für lineare Abb.

Sei V, W endlich erzeugt, $f: V \to W$ lineare Abb.

$$\Rightarrow \boxed{\dim(\mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(V)}$$

Lemma $f(x) = f(y)$ g.d.w. $x - y \in \text{Kern}(f)$

Bew: „$\Rightarrow$" $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0$

$\Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in \text{Kern}(f)$

„$\Leftarrow$" $x - y \in \text{Kern}(f)$

$\Rightarrow f(x-y) = 0$

$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0$

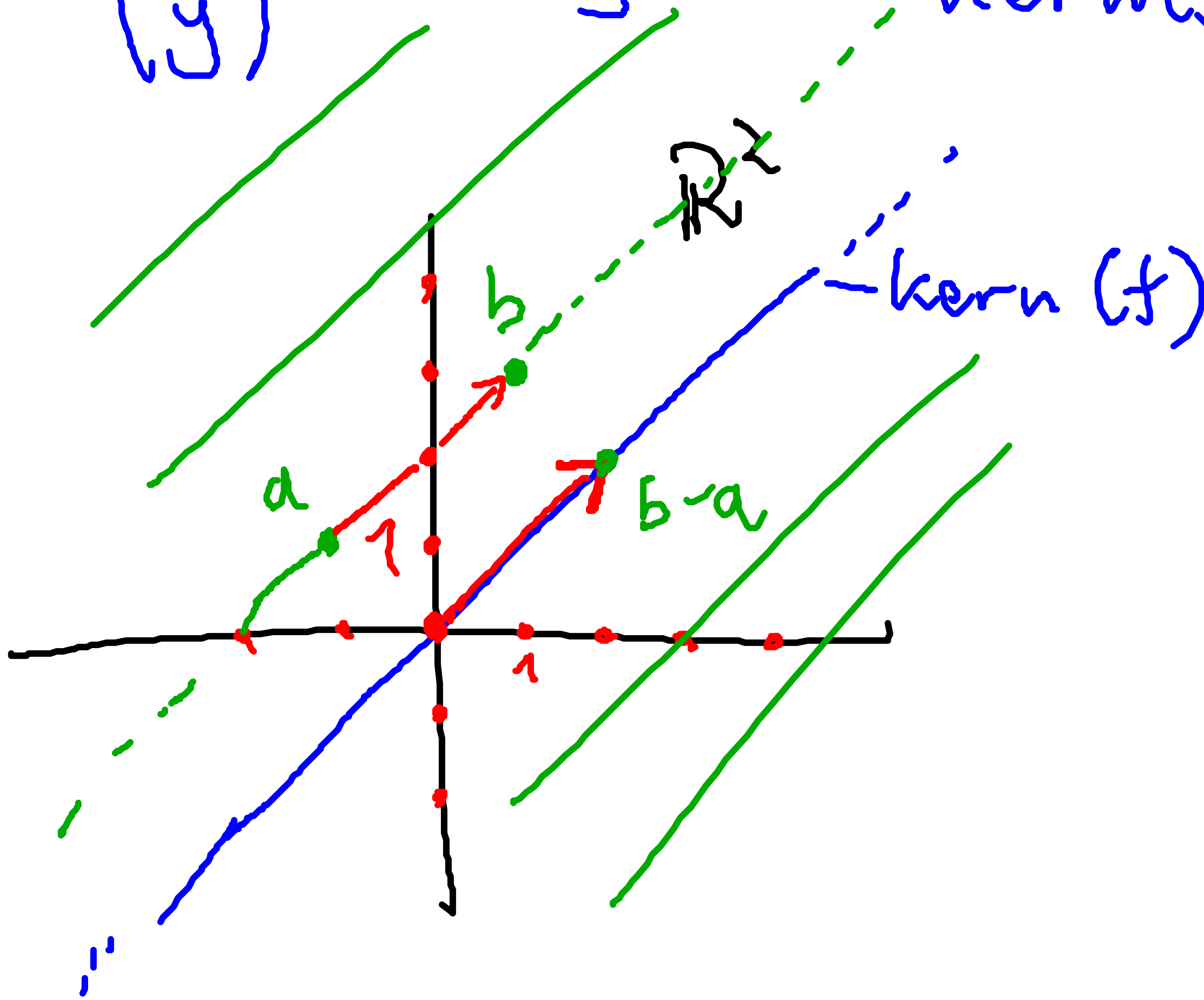
$\Rightarrow f(x) = f(y)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y$

$\text{Bild}(f) = \mathbb{R}^1$

$\text{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y \right\}$



$$\underbrace{f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{a} = -2$$

$$\underbrace{f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b} = -2$$

Satz Sei V endl. erzeugter VR und $f: V \to W$ lineare Abb. dann gilt

$$\underbrace{\dim(\text{Kern}(f))}_{=m} + \underbrace{\dim(\text{Bild}(f))}_{=k} = \underbrace{\dim(V)}_{=m+k}$$

Bew Sei $v_1 \ldots v_m$ Basis von Kern(f)
$w_1 \ldots w_k$ Basis von Bild(f)

Sei $u_1 \ldots u_k \in V$ mit $f(u_1) = w_1 \ldots f(u_k) = w_k$

Ziel: Zeige $(v_1 \ldots v_m, u_1 \ldots u_k)$ Basis von V

(i) „$v_1 \dots v_m, u_1 \dots u_k$ spannt V auf"

Sei $v \in V$ $\qquad f(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k$

$$v' := \underline{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k}$$

$$\Rightarrow f(v) = f(v') \Rightarrow v - v' \in \mathrm{kern}(f)$$

$$\Rightarrow v - v' = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m$$

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_n + \underline{v'}$$

$$= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$$

$$\in \mathrm{span}(\dots)$$

"(ii) $(v_1 \ldots v_m, u_1 \ldots u_k)$ ist linear unabh."

$$0_V = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m + \underbrace{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k}_{=0}$$

$$\Big\downarrow f$$

$$0_W = f(\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k)$$

$$= \lambda_1 f(u_1) + \ldots \lambda_k f(u_k)$$

$$= \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0 \ \ldots \ \lambda_k = 0}$$ (weil $w_1, \ldots w_k$ lin. unabh.)

$$\Rightarrow 0_V = \mu_1 v_1 + \ldots \mu_m v_m$$

$$\Rightarrow \underline{\mu_1 = 0 \ \ldots \ \mu_m = 0}$$ (weil $v_1, \ldots, v_k$ lin. unabh.)

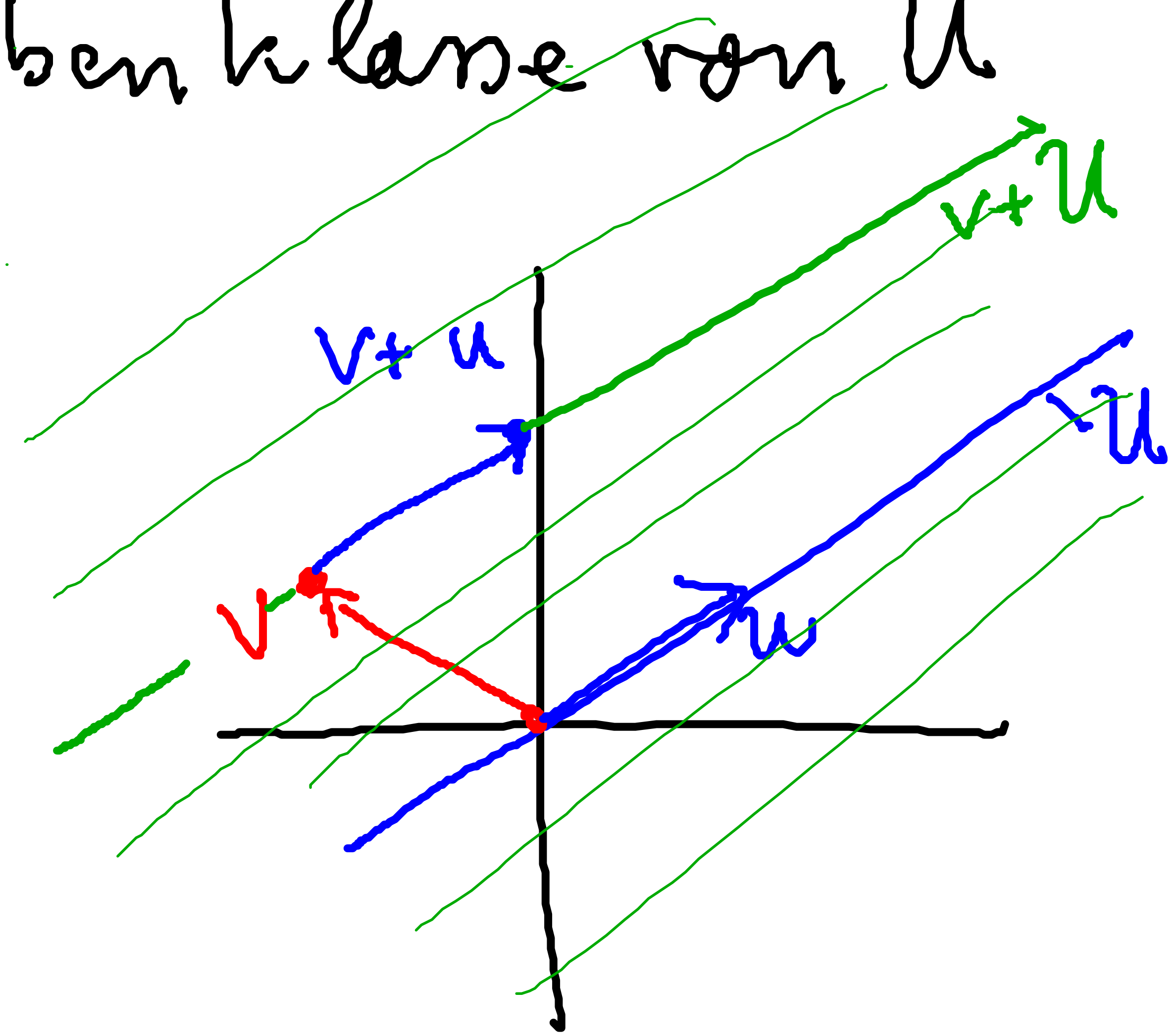
$\Rightarrow (v_1 \ldots v_m, u_1 \ldots u_k)$ linear unabh.

Quotienten Räume

Sei $\mathcal{U}$ ein Untervektorraum von V

$v \in V$, $v+\mathcal{U}$ Nebenklasse von $\mathcal{U}$

$v+\mathcal{U} = \{v+u \mid u \in \mathcal{U}\}$



$V/\mathcal{U} = \{v+\mathcal{U} \mid v \in V\}$

Quotientenraum von V nach $\mathcal{U}$