Steinitzsches Austauschlemma:

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $w \in V \setminus \{0\}$ dann gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ so dass $(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n, w)$ wieder eine Basis von V ist.

Bew Sei $w = \underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ OBdA $\lambda_1 \neq 0$

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n$$

$v_1 \in \mathrm{span}(w, v_2, \ldots, v_n)$

$\Rightarrow V = \mathrm{span}(w, v_2, \ldots, v_n)$

Noch zu zeigen: $(w, v_2 \dots v_n)$ sind linear unabh.

$$0 = \mu_1 w + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

$$0 = \mu_1 (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \dots + \lambda_n v_n) + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

$$0 = \underbrace{\mu_1 \lambda_1}_{=0} v_1 + \underbrace{(\mu_1 \lambda_2 + \mu_2)}_{=0} v_2 + \dots + \underbrace{(\mu_1 \lambda_n + \mu_n)}_{=0} v_n$$

$\lambda_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0, \dots, \mu_n = 0$$

$$\Rightarrow (w, v_2, \dots, v_n) \text{ linear unabh.}$$

Austauschsatz für Basen:

Sei $(v_1 \ldots v_n)$ eine Basis von V und sei $(w_1 \ldots w_r)$ linear unabhängig. Dann gilt:

(i) $r \leq n$

(ii) Es gibt Indizes $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ so dass wenn man $v_{i_1} \ldots v_{i_r}$ aus der Basis weglasst und $w_1 \ldots w_r$ hinzufügt wieder eine Basis erhält.

Bew (Induktion über r)

- $r=0$ gilt trivialerweise
- Sei also $r \geq 1$ und der Satz für $r-1$ bereits bewiesen

Sei $w_1, \dots, w_r$ linear unabhängig

$\Rightarrow w_1, \dots, w_{r-1}$ linear unabhängig

Ind vor

$\Rightarrow$ Nach Umnummerierung (oBdA) ist $(w_1, \dots, w_{r-1}, v_r, \dots, v_n)$ Basis

$\Rightarrow w_r \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_{r-1}, v_r, \dots, v_n)$

$\Rightarrow w_r = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{r-1} w_{r-1} + \lambda_r v_r \dots \lambda_n v_n$

mindestens ein $\lambda_i \neq 0$

oBdA $\lambda_r \neq 0$

Argumentation des A-Lemmas

$\Rightarrow (w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ ist Basis

Beweis von (i)

Noch zu zeigen $r-1 \neq n$.

Wenn doch:

$(w_1, \dots, w_{r-1})$ Basis

$\Rightarrow w_r \in \mathrm{span}(w_1, \dots, w_{r-1})$

↯ zu l.u.

$\Rightarrow r \leq n$

Satz Alle Basen eines endl. erzeugten VR haben gleiche Mächtigkeit.

Bew Sei $(v_1 \ldots v_n)$ Basis
$(w_1 \ldots w_m)$ Basis

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Austauschsatz: } (v_1 \ldots v_n) \text{ Basis} \\ \phantom{\text{Austauschsatz: }} (w_1 \ldots w_m) \text{ lin. unabh.} \end{array}\right\} m \leq n \\ \left.\begin{array}{l} \text{Austauschsatz: } (w_1 \ldots w_m) \text{ Basis} \\ \phantom{\text{Austauschsatz: }} (v_1 \ldots v_n) \text{ lin. unabh.} \end{array}\right\} n \leq m \end{array}\right\} m = n$$

Def: Sei $(v_1 \ldots v_n)$ Basis von V. $\dim(V) := n$

Pragmatisch im $\mathbb{R}^3$

gleichwertig

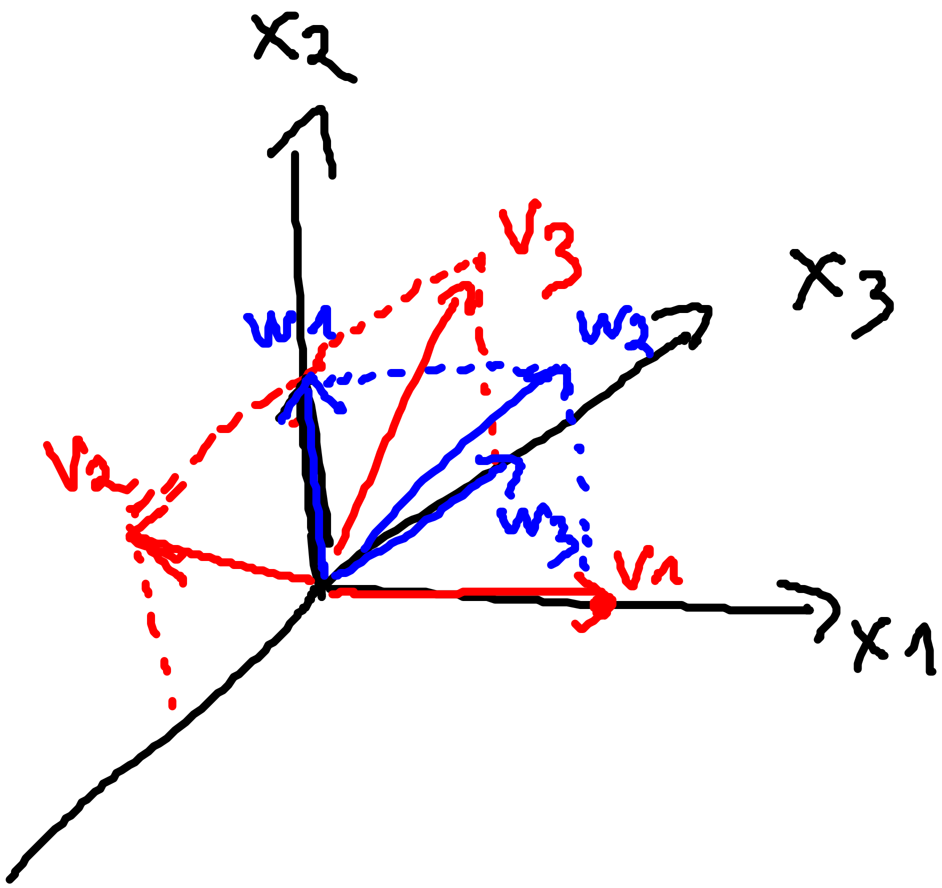
(i) (v_1, v_2, v_3) Basis
(ii) (v_1, v_2, v_3) linear unabh.
(iii) $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$
(iv) $v_1, v_2, v_3, 0$ liegen nicht in einer Ebene.

im $\mathbb{R}^n$

gleichwertig:

(i) $(v_1 \dots v_n)$ ist Basis
(ii) $(v_1 \dots v_n)$ ist linear unabh.
(iii) $\operatorname{Span}(v_1 \dots v_n) = \mathbb{R}^n$

Konkretes Beispiel:



$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \end{array} \Bigg| \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

4.1 Lineare Abbildungen

Zur Erinnerung
Gruppenhomomorph.
$f: G \to H$
$f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$

Def Seien V, W K-Vektorraum
$f: V \to W$ heißt lineare Abbildung wenn

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

(ii) $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

Beispiel

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 \\ \lambda_2+\mu_2 \\ \lambda_3+\mu_3 \end{pmatrix}\right) = (\lambda_1+\mu_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (\lambda_2+\mu_2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (\lambda_3+\mu_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}\right)$$

Analog $f\left(\lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}\right)$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 v_1 + \dots \dots + \lambda_n v_n$$

Ist lineare Abb.

<u>Bew</u> Rechnung ist wie im Beispiel.

Elementare Eigenschaften

f sei lin Abb.

(i) $f(v-w) = f(v) - f(w)$

Bew $f(v-w) = f(v+(-1)w) = f(v) + f((-1)w)$

$= f(v) + (-1)\cdot f(w) = f(v) - f(w)$

(ii) $f(0_V) = 0_W$

Bew $0 = v - v$

$f(0_V) = f(v-v) = f(v) - f(v) = 0_W$

(iii) $f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)$

$= \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$

<u>Bew</u> $f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)$

$= f(\lambda_1 v_1) + \ldots + f(\lambda_n v_n)$

$= \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$

Satz V, W endl. erz. Vektorräume

$(v_1 \ldots v_n)$ sei Basis von V, $w_1 \ldots w_n \in W$

$f: V \to W$ ist lin. Abb.

$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \mapsto \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n$

Bew Sei $a, b \in V$ mit $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$

(i) $f(a+b) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) \cdot v_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i = f(a) + f(b)$

(ii) $f(\lambda \cdot a) = f(\lambda \cdot \sum \lambda_i v_i)$

$= f(\sum \lambda \cdot \lambda_i v_i)$

$= \sum \lambda \cdot \lambda_i w_i$

$= \lambda \cdot \sum \lambda_i w_i$

$= \lambda \cdot f(a)$