Wiederholung: (Span, lineare unabh., Basen)

1. Span   **Def** (endlichen Fall)   Sei $v_1 \dots v_n \in V$

$$\mathrm{span}(v_1, v_2, \dots v_n) = \{ \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n}_{\text{linear-kombination}} \mid \lambda_1 \dots \lambda_n \in K \}$$

Def (unendlichen Fall) Sei eine Menge M von Vektoren (M potentiell unendl. groß) ist span(M) die Menge allen Vektoren die sich als linearkombination von endl. vielen Vektoren aus M schreiben lassen

<u>Satz</u> span (....) ist Untervektorraum von V.

<u>Bsp</u> span $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$$= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \right\}$$

Es gilt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda_2 \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda_3 \left(2 \cdot \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + 1 \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right)$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + 2\lambda_3)}_{\mu_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{(\lambda_2 + \lambda_3)}_{\mu_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

2. Linear unabhängig

<u>Def</u> (endlicher Fall) $v_1, \dots, v_n$ ist linear unabhängig falls aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ folgt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

<u>Def</u> (unendlicher Fall)

eine unendliche Menge M von Vektoren heißt linear unabhängig wenn jede endl. Teilmenge linear unabhängig ist.

Bsp

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ sind linear abhängig

$$\underline{-2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underline{(-1)} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \underline{1} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Satz Sind $v_1 \dots v_n$ linear abhängig gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\operatorname{span}(v_1 \dots v_n) = \operatorname{span}(v_1, \dots, \hat{v}_i \dots v_n)$$

v_i wird weggelassen

3. Basis

<u>Def</u> Sei V ein Vektorraum eine Menge von Vektoren $B \subseteq V$ heißt Basis von V wenn

(i) $V = \text{span}(B)$ (B ist Erzeugendensystem von V)

(ii) B ist linear unabhängig.

Endlicher Fall: $v_1, \dots, v_n$ ist Basis von V wenn $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$ und $v_1, \dots, v_n$ linear unabh.

Satz Sei $\mathcal{B} = (v_1 \dots v_n) \in V$

Die folgenden Aussagen sind gleichwertig.

(i) $\mathcal{B}$ ist Basis

$\Downarrow$

(ii) $\mathcal{B}$ ist nicht-verkürzbares Erzeugendensystem.

$\Downarrow$

(iii) zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutige $\lambda_1 \dots \lambda_n$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$\Downarrow$

(iv) $\mathcal{B}$ ist unverlängerbar linear unabhängig, d.h. für jedes $v \in V$ ist $(v_1 \dots v_n, v)$ linear abhängig

<u>Bew</u> (i)$\Rightarrow$(ii) „Basis" $\Rightarrow$ „nicht verk. Erzsystem"

Sei $v_1 \ldots v_n$ Basis von V

$\Rightarrow \operatorname{span}(v_1 \ldots v_n) = V$ (Erz. system)

Noch zu zeigen „nicht verkürzbar"

Ann $v_1 \ldots v_n$ verkürzbar $\Rightarrow$

$\exists i: \operatorname{span}(v_1 \ldots v_n) = \operatorname{span}(v_1 \ldots \hat{v}_i \ldots v_n)$

$v_i \in$ $v_i \in$

$\Rightarrow v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n$

$\Rightarrow v_1 \ldots v_n$ linear abh. $\Big\} \Rightarrow$ Basis

(ii) $\Rightarrow$ (iii) „nicht verk. Erz. Syst" $\Rightarrow$ „eindeutige Linkomb"

Sei $v_1 \dots v_n$ nicht verk. Erz. Syst. und $v \in V$

Ann $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$

mit o.B.d.A. $\lambda_1 \neq \mu_1$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \mu_1)}_{\neq 0} v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{(\lambda_2 - \mu_2)}{(\lambda_1 - \mu_1)} v_2 - \dots - \frac{(\lambda_n - \mu_n)}{(\lambda_1 - \mu_1)} v_n$$

$\Rightarrow v_1 \in \operatorname{span}(v_2 \dots v_n) \Rightarrow$ verkürzbar

$\lightning$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) „eindeutige Linkomb" $\Rightarrow$ „nichtverlängerbar linear unabh"

Sei für jedes $v \in V$ die Darstellung $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ eindeutig

$\Rightarrow$ $0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ eindeutig $0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n$

$\Rightarrow$ $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabh.

Ist $v \in V$ so ist $1 \cdot v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$

$\Rightarrow$ $(v_1, \ldots, v_n, v)$ linear abh.

(vi) $\Rightarrow$ (i) „nicht verlängerbar linear unabh" $\Rightarrow$ „Basis"

Sei $v_1, \dots, v_n$ unverlängerbar lin. unabh.
Zu zeigen $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = V$

Sei $v \in V \Rightarrow (v_1, \dots, v_n, v)$ linear abh.

$\Rightarrow$ es ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda$ mit
$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda v$$
$\lambda \neq 0$ da $v_1, \dots, v_n$ unabh.
$$\Rightarrow v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$$

Def V heißt endlich erzeugt wenn $V = \mathrm{span}(v_1 \dots \dots v_n)$

Satz jeder endl erzeugte VR hat Basis.

„Bew" Sei $V = \mathrm{span}(v_1 \dots v_n)$

entweder: $v_1 \dots v_n$ linear unabh $\Rightarrow$ fertig

oder: Es gibt ein i mit $v_i \in \mathrm{span}(v_1 \dots \hat{v_i} \dots v_n)$

Nimm v_i weg

Allgemeiner: jeder VR hat Basis

Frage: Sei $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_m)$ beides Basen eines Vektorraums V

$$\boxed{\text{gilt } n = m \,?}$$

Antwort: JA noch einiges an Arbeit.

Steinitz'sches Austauschlemma:

Sei $(v_1 \ldots v_n)$ Basis von V und $w \in V \setminus \{0\}$ dann ex $i \in \{1 \ldots n\}$ so dass $(v_1 \ldots \hat{v}_i \ldots v_n, w)$ Basis von V ist.