Wiederholung:

Sei V ein K-VR: Eine endliche Familie $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ in V heißt linear unabhängig $:\Longleftrightarrow$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0_V \quad (\lambda_i \in K, \forall i) \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i \right]$$

Eine unendliche Familie $(a_i)_{i \in I}$ mit der Indexmenge I heißt lin. unabh. $\Longleftrightarrow$ Jede endliche Teilfamilie ist lin. unabh.

Lemma 1) $\mathfrak{A} = (a_i)_{i\in I}$

$\mathfrak{A}$ ist lin. unabh. $\Longleftrightarrow$

$\forall a \in \operatorname{span}(\mathfrak{A}) \quad \exists J \subseteq I : |J| = s \in \mathbb{N}$

$\exists_1 (\lambda_i)_{i\in J} \in K^s \quad : \quad a = \sum_{j\in J} \lambda_j a_j$

Satz: $\mathfrak{A} = (a_i)_{i\in I}$ eine Familie im K-VR V

$\mathfrak{A}$ ist lin abhängig $\Longleftrightarrow \exists k \in I : \operatorname{span}(\mathfrak{A})$
$= \operatorname{span}((a_i)_{i\in I\setminus\{k\}})$

$\Longleftrightarrow$: $\mathfrak{A}$ ist um a_k verkürzbar

Beweis „$\Rightarrow$" $\mathfrak{A}$ sei linear abhängig

$\Rightarrow \exists J \subset I : |J| = s \in \mathbb{N}$ (o.B.d.A. $J = \{1, 2, \dots, s\}$)

$\wedge\ 0_V = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i \ \wedge$ o.B.d.A. $\lambda_1 \neq 0$

$\Rightarrow \underline{a_1 = -\sum_{i=2}^{s} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} a_i} \in \operatorname{span}((a_i)_{i \in I \setminus \{1\}})$

$\subseteq \operatorname{span}(\mathfrak{A})$

Ziel: Zeige „$\supseteq$": Sei $b \in \operatorname{span}(\mathfrak{A})$

$\Rightarrow \exists J' \subset I$: J' ist endlich und o.B.d.A. $M = J \cup J' = \{1, 2, \dots, m\}$

$\underline{b = \sum_{j \in J'} \mu_j a_j = \sum_{j \in M} \mu_j a_j}$ wobei $\mu_j = 0\ \forall j \in M \setminus J'$

$$b = \sum_{j\in M} \mu_j a_j = \mu_1 a_1 + \sum_{j\in M\setminus\{1\}} \mu_j a_j$$ (a₁ einsetzen)

$$= -\mu_1 \sum_{j=2}^{s} \frac{\lambda_j}{\lambda_1} a_j + \sum_{j=2}^{m} \mu_j a_j$$

(Seien nun $\lambda_j = 0 \ \forall j \in M\setminus\{1\}$)

$$= -\mu_1 \sum_{j=2}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_1} a_j + \sum_{j=2}^{m} \mu_j a_j$$

$$= \sum_{j=2}^{m} \left(\mu_j - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\lambda_j\right) a_j \in \operatorname{span}\left((a_i)_{i\in I\setminus\{1\}}\right)$$

„$\Leftarrow$" o.B.d.A. $k=1$; $\mathrm{span}(\mathfrak{A}) = \mathrm{span}((a_i)_{i\in I\setminus\{1\}})$

$\Rightarrow a_1 \in \mathrm{span}((a_i)_{i\in I\setminus\{1\}})$

$\Rightarrow \exists J \subset I : J$ endlich $\wedge\ a_1 = \sum_{j\in J} \lambda_j a_j \wedge 1 \notin J$

$\Rightarrow 0_V = \underbrace{(-1)}_{\neq 0} a_1 + \sum_{j\in J} \lambda_j a_j$

$\Rightarrow \mathfrak{A}$ linear abhängig $\square$

Definition: Eine Familie $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ in einem K-VR V heißt Erzeugendensystem

$:\Longleftrightarrow \operatorname{span}(\mathcal{B}) = V$

Definition: Eine Familie $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ in einem K-VR V heißt Basis $:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensys.

$\wedge$ $\mathcal{B}$ linear unabh.

Beispiele:

- $\mathcal{B} = (\,)$ ist Basis von $V = \{0_V\}$

- $$(e_i)_{1 \leq i \leq n} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \Bigg] \; n \text{ Zeilen}$$
ist Standardbasis des K-VR K^n

- Basis für den K-VR $K[X]$ ist: $(X^i)_{i \in \mathbb{N}} = (1, X, X^2, \dots)$

Satz: $\mathcal{B}=(b_i)_{i\in I}$ eine Familie im K-VR $V\neq\{0\}$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathcal{B}$ ist Basis

(ii) $\mathcal{B}$ ein nicht-verkürzbares Erzeugendensystem

(iii) (verbal: $\forall a\in V$: a lässt sich eindeutig mit Hilfe der Basisvektoren linear kombinieren)

$\forall a\in V: \exists J\subset I : |J|=s\in\mathbb{N}, \exists_1 (\lambda_j)_{j\in J}\in K^s : a=\sum_{j\in J}\lambda_j a_j$

$\exists_1 \lambda_j\in K\ \forall j\in J$

(iv) $\forall b_j\in V, j\notin I$:

$\mathcal{B}$ ist lin unabh. aber $(b_i)_{i\in I\cup\{j\}}$ nicht iv verbal: Hinzunehmen eines beliebigen Vektors zu $\mathcal{B}$ liefert eine linear abhängige Familie

Beweis: $(i) \overset{1}{\Rightarrow} (ii) \overset{2}{\Rightarrow} (iii) \overset{3}{\Rightarrow} (iv) \overset{4}{\Rightarrow} (i)$

1 Annahme $\mathcal{B}$ sei verkürzbar

Exkurs: $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $b_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{span}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} =: V \subset \mathbb{R}^3$

(b_1, b_2, b_3) ist Erzeugendensys von V

b_1, b_2, b_3 sind linear abhängig, da $b_3 = b_1 + b_2$

$\Rightarrow (b_1, b_2, b_3)$ ist keine Basis

b_1, b_2, b_3 ist verkürzbar:

$\operatorname{span}(b_1, b_2, b_3) = \operatorname{span}(b_1, b_2)$

b_1, b_2 sind lin. unabh. $\Rightarrow (b_1, b_2)$ Basis von V, da $\operatorname{span}(b_1, b_2) = V$

$a \in V$ etwa $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a = 2 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 = 2 \cdot b_3$

$\Rightarrow$ a besitz 2 verschiedene Lin. Kombinationen aus b_1, b_2, b_3

$\Rightarrow$ b_1, b_2, b_3 ist keine Basis von V

a besitzt eine eindeutige Darstellung bzgl. b_1, b_2

$\Rightarrow$ (b_1, b_2) eine Basis

Frohe

Weihnachten