Wiederholung: UVR

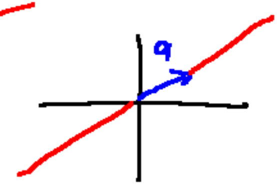
Definition: Sei V ein K-VR und $U \subseteq V$

U heißt **Untervektorraum** $:\Longleftrightarrow$

(i) $U \neq \emptyset$

(ii) $\forall a, b \in U : a + b \in U$

(iii) $\forall \lambda \in K, \forall a \in U : \lambda a \in U$



Satz: UVR sind VR

Beispiele für UVR'e des $\mathbb{R}^2 = \left\{ \binom{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$

- $U_0 = \{ 0_V \} = \left\{ \binom{0}{0} \right\}$
- $U_{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$
- kleinster UVR, der $0 \neq c \in V$ enthält

  $\xrightarrow{(iii)} U_c = \{ \lambda c \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

Bem: $\forall c \in V : c \neq 0 \quad U_c$ ist UVR

Beweis: (i) $c \in U_c \neq \emptyset$

(ii) $\forall a, b \in U_c \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}: a = \lambda c \wedge b = \mu c$

$\Rightarrow a + b = \lambda c + \mu c = \underbrace{(\lambda + \mu)}_{\in \mathbb{R}} c \in U_c$

(iii) $a \in U_c, \mu \in K \Rightarrow \exists \lambda \in K: a = \lambda c$

$\Rightarrow \mu \cdot a = \underbrace{(\mu \cdot \lambda)}_{\in \mathbb{R}} \cdot c \in U_c$

$\longrightarrow$ UVR U_c

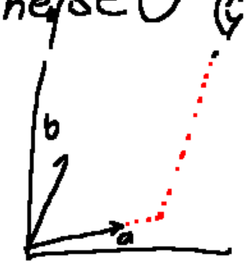
Bemerkung: $\exists$ UVR U: $U_a \subsetneq U \subsetneq V = \mathbb{R}^2$?

Seien $a, b \in V \setminus \{0_V\}$ und $a \notin U_b$

(d.h. $\nexists \lambda \in \mathbb{R}: \lambda b = a$)

Kleinster UVR, der a & b enthält heiße U

$\overset{(iii)}{\underset{(ii)}{\Longrightarrow}} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \lambda a + \mu b \in U$



Behauptung: $\{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

Beweis: Sei $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ beliebig

$$\binom{x}{y} = \lambda \binom{a_1}{a_2} + \mu \binom{b_1}{b_2} \rightarrow \text{lineares Glsys.}$$

lösbar $\Leftrightarrow a \notin U_b$

Definition: Sei V ein K-VR und $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$

$$\operatorname{span}(a_1, a_2, \dots, a_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \;\middle|\; \lambda_i \in K, \forall i \right\}$$

$$\operatorname{span}() := \{0_V\}$$

Satz: 1) $\operatorname{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ist UVR

2) U ein UVR von V & $a_1, a_2, \dots, a_n \in U \Rightarrow$

$\operatorname{span}(a_1, a_2, \dots, a_n) \subseteq U$

Beweis 1) o.B.d.A. $n \geq 1$

(i) $a_1 \in \operatorname{span}(a_1, a_2, \dots, a_n) =: U \neq \emptyset$

(ii) $b, c \in \operatorname{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$\Rightarrow \exists \lambda_i, \mu_i \in K \quad (i \in \{1, 2, \dots, n\})$:

$b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \quad \wedge \quad c = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i$

$\Rightarrow b + c = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda_i + \mu_i)}_{\in K} a_i \in U$

(iii) $b \in U, \mu \in K$

$\Rightarrow \mu \cdot b = \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\mu \cdot \lambda_i)}_{\in K} a_i \in U$

zu 2) Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in U$ und U ein UVR von V

$b \in \mathrm{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$\Rightarrow \quad b = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i a_i}_{\in U \text{ nach (iii)}}}_{\in U \text{ nach (ii)}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{span}(a_1, a_2, \dots a_n) \subseteq U$$

Beispiele:

- $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + (a_{n-1} - a_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + (a_1 - a_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Typische Frage

$$\mathrm{span}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathrm{span}(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

$\rightarrow$ lineare (Un-)Abhängigkeit

Beispiel: betrachte $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) =: U$

$U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, da $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, da $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$U = \ldots$

Definition: Eine Familie von Vektoren $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ heißt linear unabhängig $:\Longleftrightarrow$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0_V \implies \lambda_i = 0, \forall i \right]$$

Bemerkung: $a_1, a_2, \dots, a_n$ sind lin. abhängig, wenn sich der 0-Vektor nicht-trivial aus ihnen linear kombinieren lässt.

Satz: ① $(0_V, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ ist lin. abh.

② $(b, b, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ ist linear abhängig

Sei $a \neq 0_V$ ist a lin abhängig?

NEIN

$\lambda a = 0_V \Rightarrow \lambda = 0$

Beweis: ① $0_V = \underbrace{1}_{\neq 0_K} \cdot 0_V + \sum_{i=2}^{n} 0_K \cdot a_i$ ← nicht-triviale Nullsumme

② $0_V = 1b + (-1)b + \sum_{i=3}^{n} 0_K \cdot a_i$

$\neq 0_K$

Satz: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ist linear unabhängig

$\Longleftrightarrow$ $\forall b \in \operatorname{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ lässt sich

b eindeutig aus den a_i's linear kombin.

Beweis:

„$\Longrightarrow$" $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sind lin. unabh. & $b \in \operatorname{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Existenz der Linearkombination $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ folgt

direkt aus der Definition von span

Eindeutigkeit: Annahme $b = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i$ mit mind. einem $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ für welches $\lambda_i \neq \mu_i$ (o.B.d.A. $i = 1$)

$$0_V = b - b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) a_i$$

$$= (\lambda_1 - \mu_i) a_1 \implies \lambda_1 = \mu_1 \quad ↯$$

$\neq 0_V$, da $a_1, a_2, \dots, a_n$ lin unabh. nach Vor.

„$\Leftarrow$" indirekt: $0_V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ mit $\lambda_i \neq 0$ für mind ein $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (o.B.d.A. $i=1$)

$\Rightarrow$ Darstellung von 0_V nicht eindeutig:
(es gibt ja noch die triviale Kombination)

$\square$