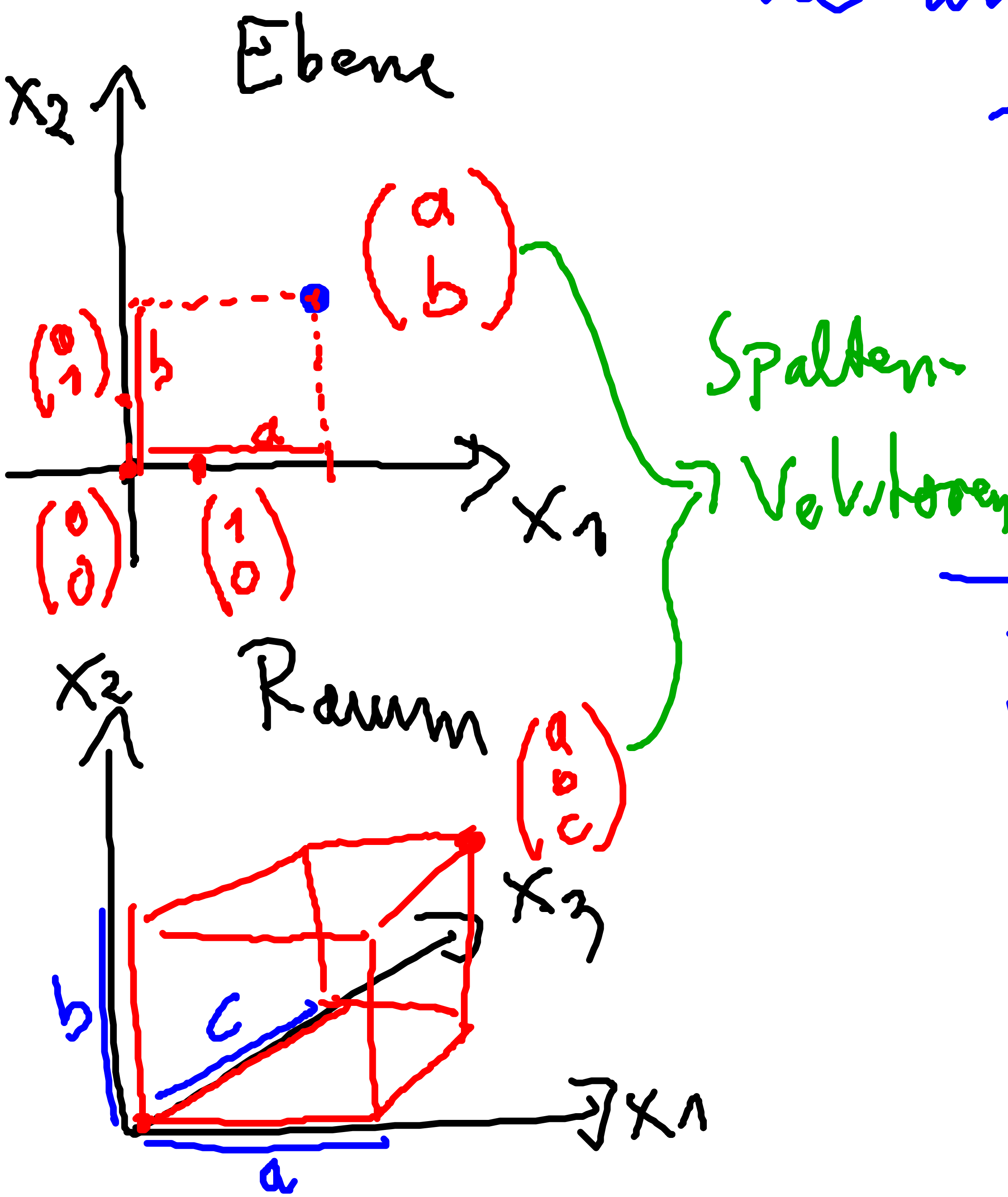
② Lineare Algebra
Vektorräume

- „Rechnen" mit Punkten im Raum
- Geometrie ⟺ Algebra
- Lineare Gleichungssysteme
- „Räume" von Objekten

3.1 Motivierende Beispiele:

Punkte in Ebene und Raum



Position eines Punktes in der Ebene kann durch Angabe von zwei Zahlen (Koordinaten) angeben

3 Zahlen für Punkte im Raum

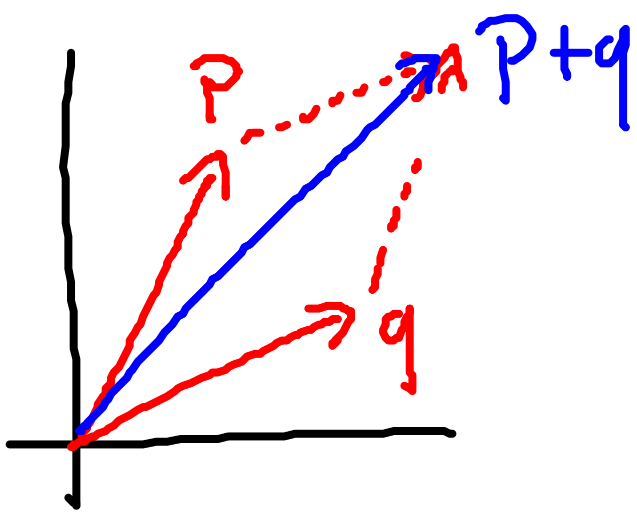
(a, b), (a, b, c)

Zeilenvektoren

Zwei Grundoperationen:

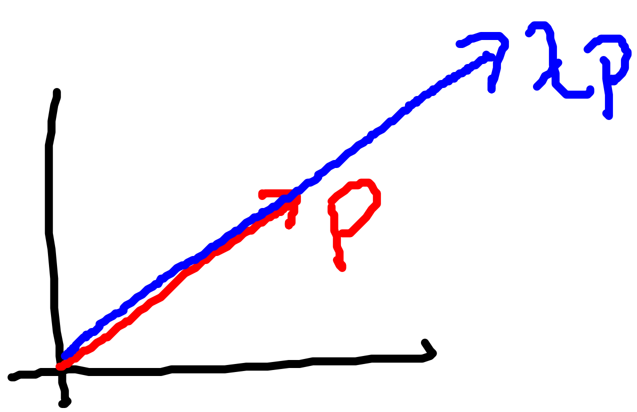
Ebene:

Vektor-Addition



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

Skalar-Multiplikation:



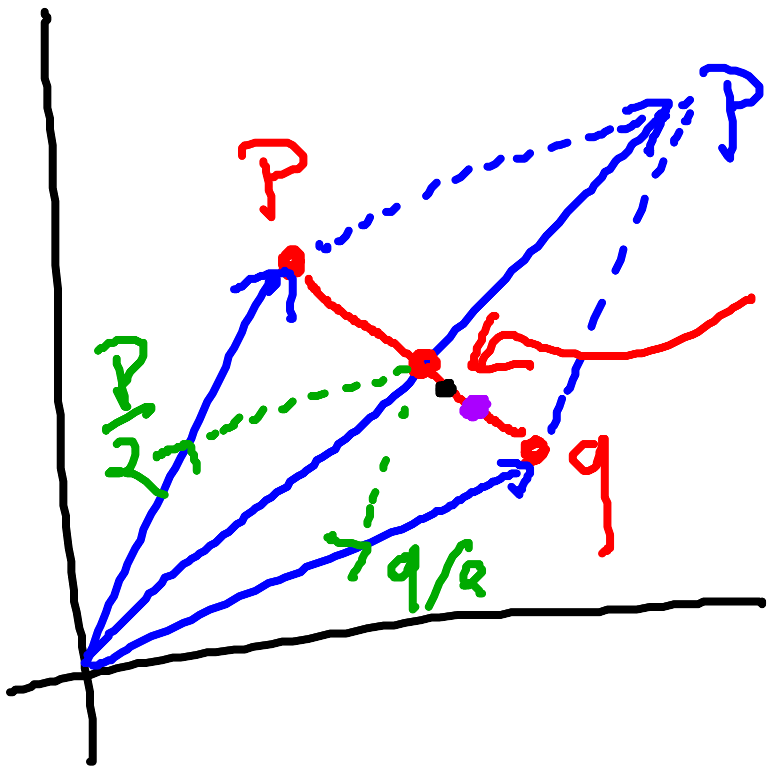
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \end{pmatrix}$$

Analog im Raum

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt berechnen



$$\frac{p+q}{2} = \frac{p}{2} + \frac{q}{2}$$

Beobachtung:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$

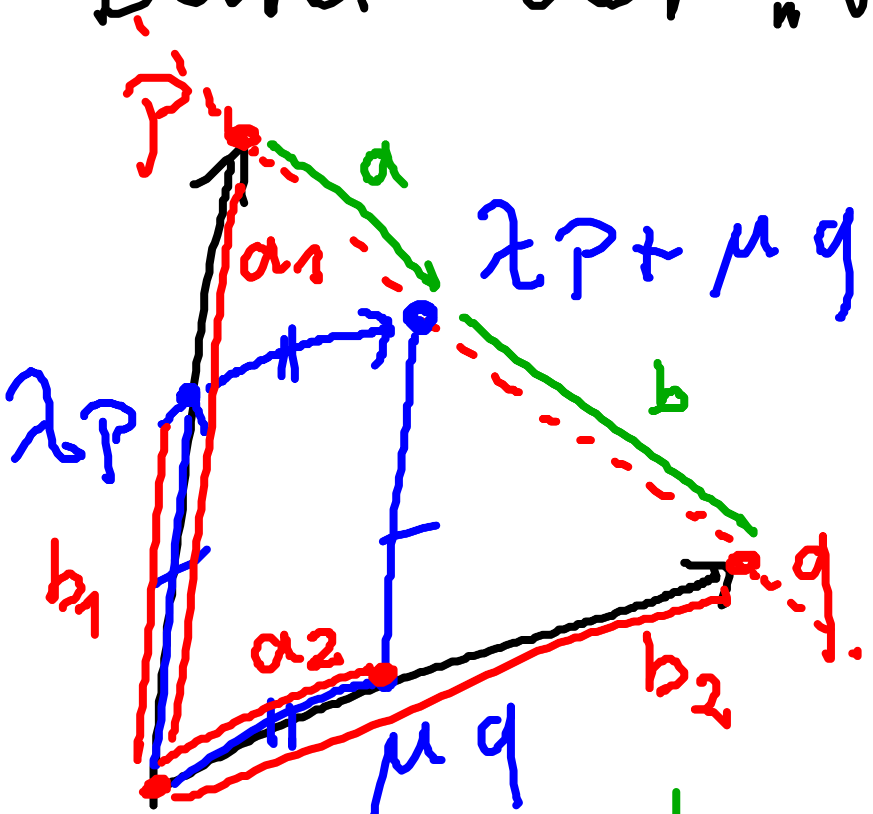
$$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right) + \frac{q}{2} = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4}q$$

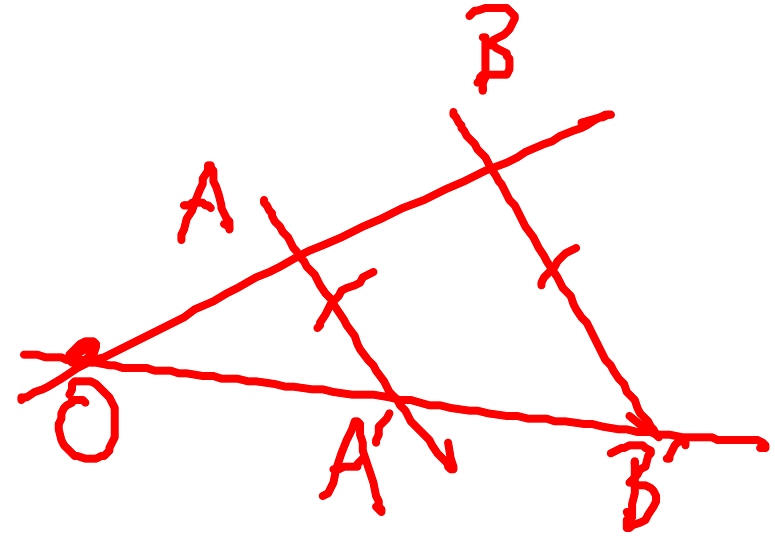
$$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}p + \frac{3}{4}q\right) = \frac{3}{8}p + \frac{5}{8}q$$

Vermutung: Gerade durch p and q ist

$$\{\lambda p + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}$$

Beweis der „Vermutung"





$$\frac{|AB|}{|OB|} = \frac{|A'B'|}{|OB'|}$$

$$\lambda = \frac{b_1}{b_1 + a_1} = \frac{b}{a+b}$$

$$\mu = \frac{a_2}{a_2 + b_2} = \frac{a}{a+b}$$

$$\lambda + \mu = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$$

Was waren notwendige Bedingungen um „so" rechnen zu können.

Zwei Typen von Objekten

Körper

Zahlen $\rightsquigarrow K$

Vektoren $\rightsquigarrow V$

Vier Operationen: Addition in K $\quad + : K \times K \to K$

Multiplikat. in K $\quad \cdot : K \times K \to K$

Vektoraddition: $+_V : V \times V \to V$

Skalar Multiplik.: $\cdot_V : K \times V \to V$

3.2 Vektorraumaxiome:

Abb: $+ : K \times K \to K$, $\cdot : K \times K \to K$, $+_V : V \times V \to V$, $\cdot_V : K \times V \to V$

(i) $(K, +, \cdot)$ ist Körper

(ii) $(V, +_V)$ ist kommutative Gruppe

(iii) $(\lambda + \mu) \cdot_V v = \lambda \cdot_V v +_V \mu \cdot_V v$; für alle $\lambda, \mu \in K, v \in V$

(iv) $\lambda \cdot_V (v +_V w) = \lambda \cdot_V v +_V \lambda \cdot_V w$; für alle $\lambda \in K, v, w \in V$

(v) $\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot_V v$ für alle $\lambda, \mu \in K, v \in V$

(vi) $1 \cdot_V v = v$ für $v \in V$

$\Rightarrow (V, K, \cdot, +, \cdot_V, +_V)$ ist Vektorraum über K

Weitere Beispiele für Vektorräume

n-dimensionale Vektorraum über $\mathbb{R}$ (heißt $\mathbb{R}^n$)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R} \right\} \qquad K = \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +_V \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} ; \quad \lambda \cdot_V \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

ist ein Vektorraum (selbst nachrechnen)

Polynome als Vektoren

$V = \mathbb{R}[X] \Leftarrow$ Polynomring mit Koeff in $\mathbb{R}$

$K = \mathbb{R}$

$p, q \in V \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$p +_V q = p + q$

$\lambda \cdot_V q = \lambda \cdot p$

$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$

$(a_0, a_1, a_2 \dots a_n, 0, \dots\dots)$

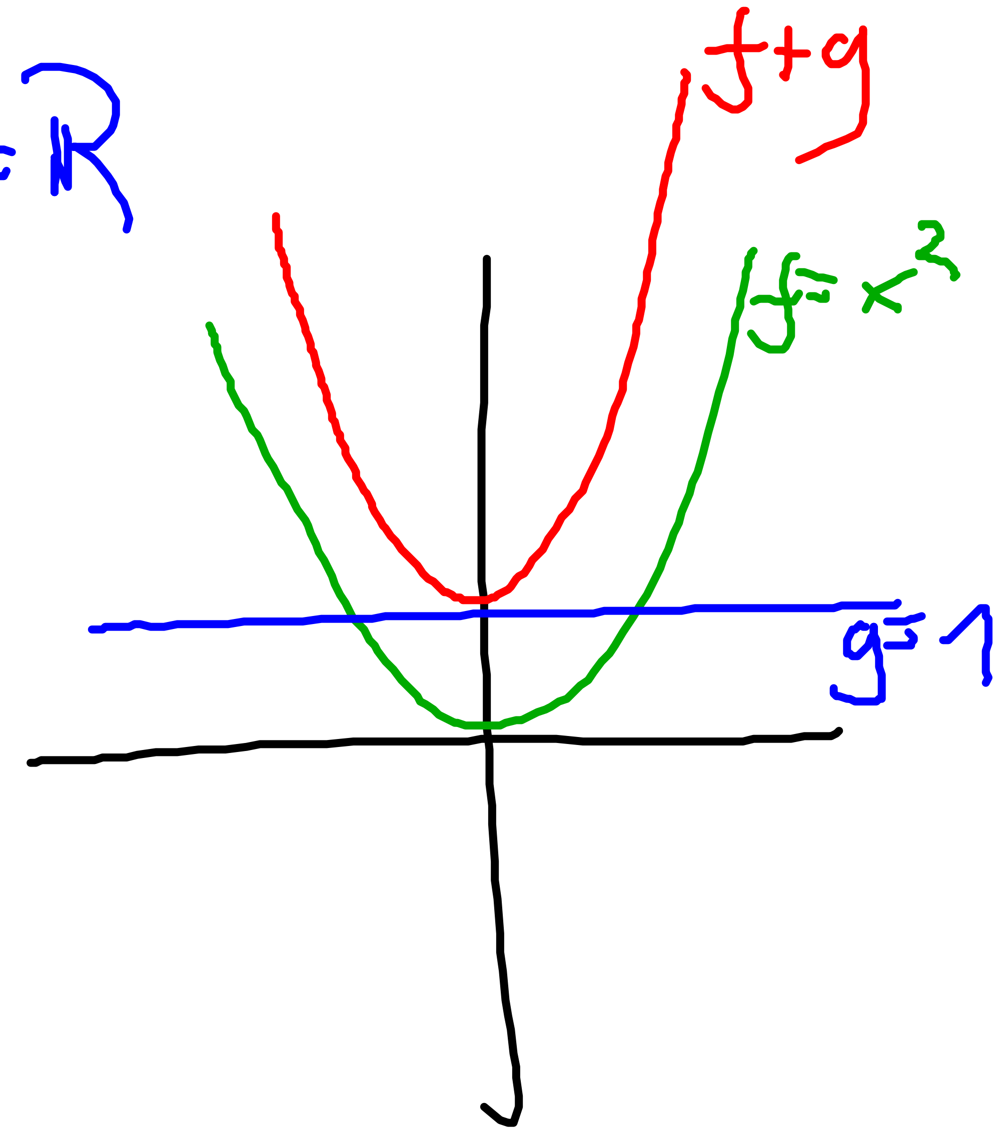
Funktionen als Vektoren

$V := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$, $K = \mathbb{R}$

$f, g \in V$; $\lambda \in K$

$f +_V g = f + g$

$\lambda \cdot_V f = \lambda \cdot f$



Rechenregeln in allen Vektorräumen:

(i) $0 \cdot_V v = \mathbf{0}$

Bew: $\underline{0 \cdot_V v} = (0+0) \cdot_V v = \underline{0 \cdot_V v} +_V \underline{0 \cdot_V v}$

$\Rightarrow 0 \cdot_V v = \mathbf{0}$

(ii) $\lambda \cdot_V \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Bew: $\underline{\lambda \cdot_V \mathbf{0}} = \lambda \cdot_V (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \underline{\lambda \cdot_V \mathbf{0}} +_V \underline{\lambda \cdot_V \mathbf{0}}$

$\Rightarrow \lambda \cdot_V \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(iii) $\lambda \cdot_V v = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$ oder $v = \mathbf{0}$

Bew: ... ..

(iv) $(-1) \cdot_V v = -_V v$

Bew: $\underline{v} +_V \underline{((-1) \cdot_V v)} = (1 \cdot_V v) + ((-1) \cdot_V v)$

$= (1 + (-1)) \cdot_V v = 0 \cdot_V v = \underline{\mathbf{0}}$

0 = Null in K

$\mathbf{0}$ = neutrale El. in $(V, +_V)$

$-_V v$ ist Inverses von v in $(V, +_V)$

Untervektorraum:

Def: Sei V ein K-Vektorraum
$V' \subseteq V$ heißt Untervektorraum wenn

(i) $V' \neq \{\ \}$
(ii) $w+v \in V'$ für alle $w, v \in V'$
(iii) $\lambda \cdot v \in V'$ für alle $v \in V'$, $\lambda \in K$

Satz Jeder Untervektorraum ist wieder ein K-Vektorraum.

Bew: Zu zeigen: $(V', +)$ eine Gruppe ist.
Neutr. El: sei $v \in V' \Rightarrow 0 \cdot v \in V' \Rightarrow 0 \in V'$
Inverses El: Sei $v \in V' \Rightarrow (-1) \cdot v \in V' \Rightarrow -v \in V'$