Nullstellen abspalten

$p(x)$ Polynom vom Grad d

$p(x_0) = 0$; x_0 ist Nullstelle

$\Rightarrow (x - x_0)$ teilt $p(x)$

geht bei Polynomdivision auf

$\Rightarrow p(x) : (x - x_0) = q(x)$

Grad $d-1$

Begründung:

Annahme $(x - x_0)$ teilt nicht $p(x)$.

grad $< d$

$p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r$

Konstante Zahl $\neq 0$

$p(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot q(x) + r$

$= r \neq 0$ ↯

$\Rightarrow$ Ein Polynom vom Grad d hat höchstens d Nullst.

Was bedeutet $\sqrt[k]{x}$ $\to$ eine Zahl y mit der Eigenschaft: $y^k = x$

Problem: solche Zahlen gibt es viele

Beispiel $\sqrt[2]{1}$ $\to$ $x^2 = 1$ hat 2 Lösungen $+1, -1$

In der Analysis definiert $\sqrt[k]{x}$ als Funkt. $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

(Satz: für jedes $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}^+$ hat $y^k = x$ genau ein Lösung in $\mathbb{R}^+$)

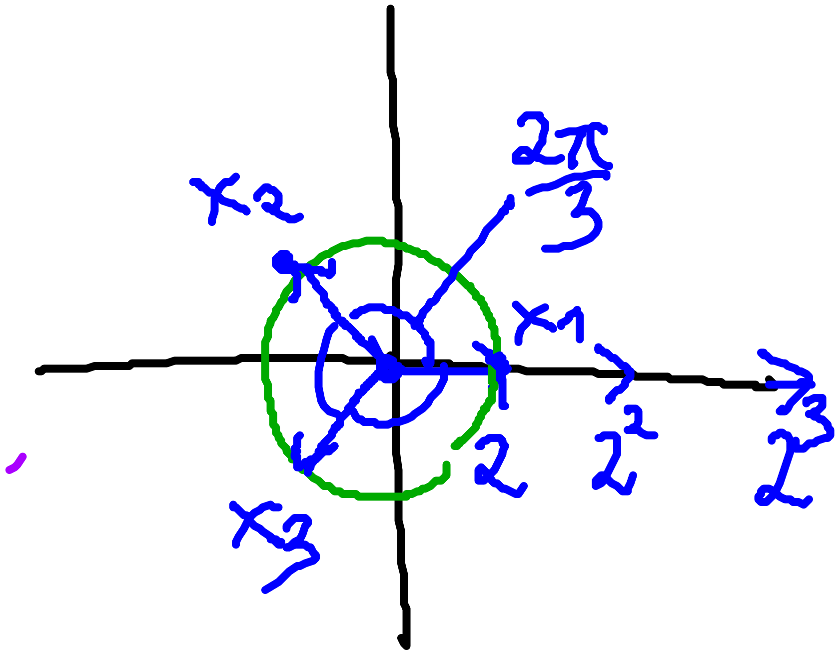
Wir sind hier an der Gesamtheit der Lösungen von $y^k = x$ über $\mathbb{C}$ interessiert.

Beispiel $\left(\sqrt[3]{8}\right)$

Suche Lösungen von $x^3 = 8$

Eine Lösung $x = 2$

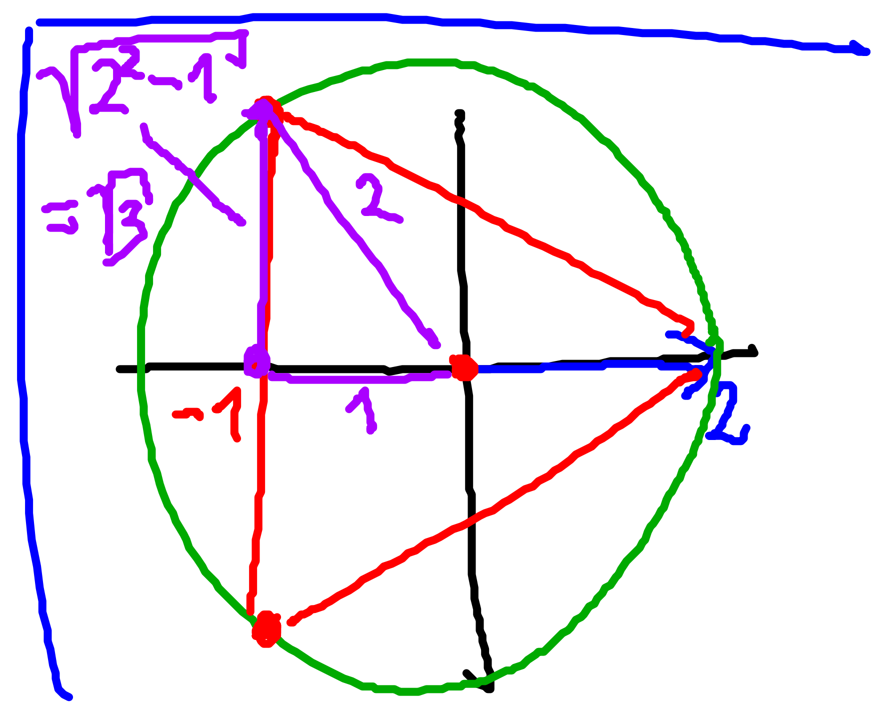
Alle Lösungen $x = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot k}$ $k = 0, 1, 2, \dots$



$x_2 = -1 + i\sqrt{3}$

$$x_2 \cdot x_2 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^2$$
$$= 1 - 3 - 2i\sqrt{3} = -2\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$x_2 \cdot x_2 \cdot x_2 = -2\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$$
$$= -2 \cdot (-3 - 1) = 8$$



k-te Einheitswurzeln

Lösungen von $x^k = 1$

Das sind $e^{i \frac{2\pi}{k} \cdot l}$ für $l = 0, 1, 2, 3 .. k-1$

Lösungen von $x^k = a$ für $a \in \mathbb{R}^+$

sind $\sqrt[k]{a} \cdot e^{i \frac{2\pi}{k} \cdot l}$

Frage: Wie löst man allgemeine Polynomgleichungen?

Nochmals: Was heißt es die Nullstellen eines Polynoms anzugeben?

⇒ Schreibe sie hin durch
Zahlen, Koeffizienten des Polynoms,
$+, -, \cdot, \div,$ Einheitswurzeln.

Auflösbarkeit von Polynomen durch „Radikale"

$d=1$ trivial (lineare Glg)

$d=2$ p, q - Formel

$d=3$ del Ferro, Tantaglia (Cardano)

$d=4$ Cardano, Ferrari

$d=5$ Abel + Galois zeigen dass im Allgemeinen Auflösung durch Radikale nicht mögl.

Potenzfunktionen:

Wie verhält sich x^k wenn x auf dem Einheitskreis liegt:

Sei $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \to e^{it}$

läuft t von 0 bis 2π so durchläuft x einmal den Einheitskreis

Was ist mit $(x(t))^2 = e^{it} \cdot e^{it} = e^{2it}$ ⟵ 2x so schnell wie $x(t)$

$(x(t))^3 = e^{3it}$ ⟵ 3x so schnell

$(x(t))^4 = e^{4it}$ ⟵ 4x so schnell

$\vdots \qquad \vdots$

Fundamentalsatz der Algebra
(Gauss 1799, d'Alembert 1746)

Jedes Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[X]$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

Das heißt es gibt $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ Jedes Polynom vom Grad d lässt sich schreiben als $(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{d-1})$

Begründung für FSDA

oBdA: $a_0 \neq 0$

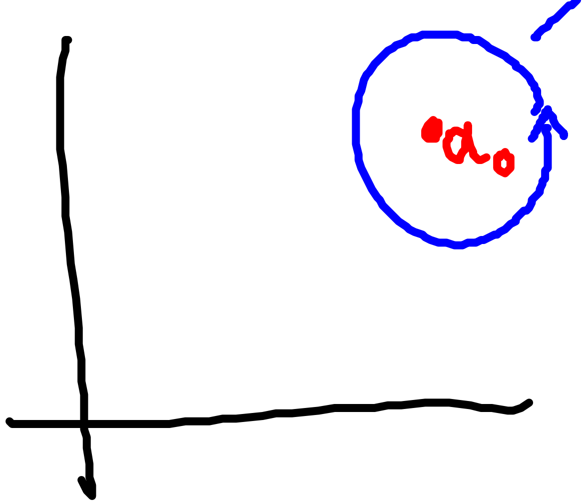
Sei $p(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Betrachte Kurven der Form

$p(r \cdot e^{it})$ r fest und $0 < t < 2\pi$

r - sehr klein

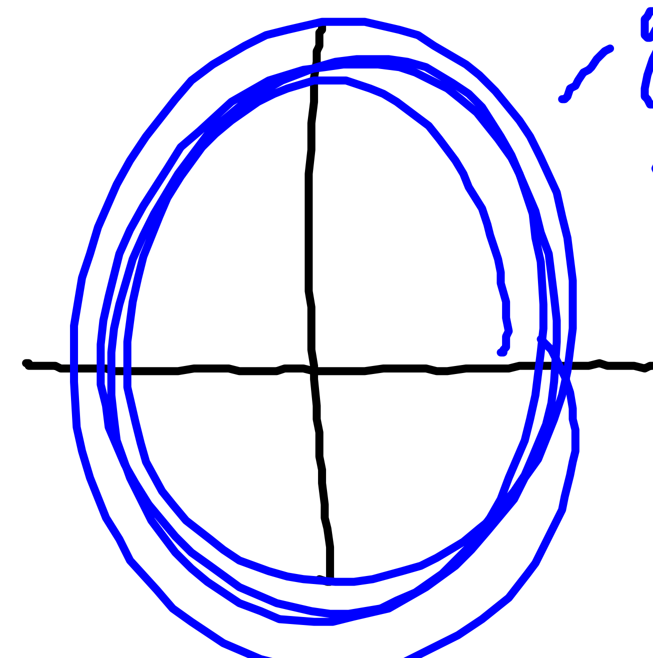
$\Rightarrow a_0 + a_1 x$ dominiert



kleines Kreis um a_0

r - sehr groß

$\Rightarrow x^d$ dominiert



großen Kreis um 0 d-mal durchlaufen