Letzte Stunde:

Nebenklassen: $(G,\circ)$ Gruppe; $(H,\circ)$ Untergr.; $a \in G$

$a \circ H = \{a \circ h \mid h \in H\}$ Linksnebenklassen

$H \circ a = \{h \circ a \mid h \in H\}$ Rechtsnebenklassen

Wenn $(G,\circ)$ kommutativ $\Rightarrow$ $a \circ H = H \circ a = [a]_H$

Satz $\{[a]_H \mid a \in G\}$ bildet Partition

Def: $N_1 \circ N_2 = \{n_1 \circ n_2 \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}$

Satz:

$$[a]_H \circ [b]_H = [a \circ b]_H$$

Quotientengruppe: G sei Gruppe (kommutativ)
H sei Untergruppe von G

$$G/H = (\{[a]_H \mid a \in G\}, \circ)$$

Satz G/H ist eine Gruppe

Bew (0) Abgeschl: $[a]_H \circ [b]_H = [a \circ b]_H$

(i) Neutrales El: $[e]_H = H$ | $[a]_H \circ [e]_H = [a \circ e]_H = [a]_H$

neutr. El von G

(ii) Inverses El zu $[a]_H$ ist $[a^{-1}]_H$

$[a]_H \circ [a^{-1}]_H = [a \circ a^{-1}]_H = [e]_H$

(iii) Assoziativität: .... selber nachrechnen

Beispiel: Nochmal Modulorechnen.

$(G,\circ) = (\mathbb{Z},+)$ $\qquad$ $(H,\circ) = (5\mathbb{Z},+)$

$\{\ldots,-2,-1,0,1,2\ldots\}$ $\qquad$ $\{\ldots,-15,-10,-5,0,5,10\ldots\}$

Nebenklassen

$\mathbb{Z}$ $\ldots -2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\ldots$

$0+5\mathbb{Z}$ ……		0	5	10	……
$1+5\mathbb{Z}$ …		1	6	11	……
$2+5\mathbb{Z}$ ……		2	7	12	……
$3+5\mathbb{Z}$ …	-2	3	8	13	……
$4+5\mathbb{Z}$	-1	4	9		……

$$(1+5\mathbb{Z})+(2+5\mathbb{Z}) = \{\ldots 3,8,13\ldots\} = 3+5\mathbb{Z}$$

$$(\mathbb{Z},+)/(5\mathbb{Z},+) \approx (\mathbb{Z}_5, +_5)$$

Homomorphismus

$(G,\circ)$ $(H,\bullet)$ Seien Gruppen mit neutralen Elementen e_G und e_H.

$f: G \to H$ heißt Homomorphismus wenn für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt

$$\boxed{f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2)}$$

Morphismen

Homomorphismus: $f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2)$

Isomorphismus: bijektiver Homomorphismus

Automorphismus: Isomorphismus von $G \to G$

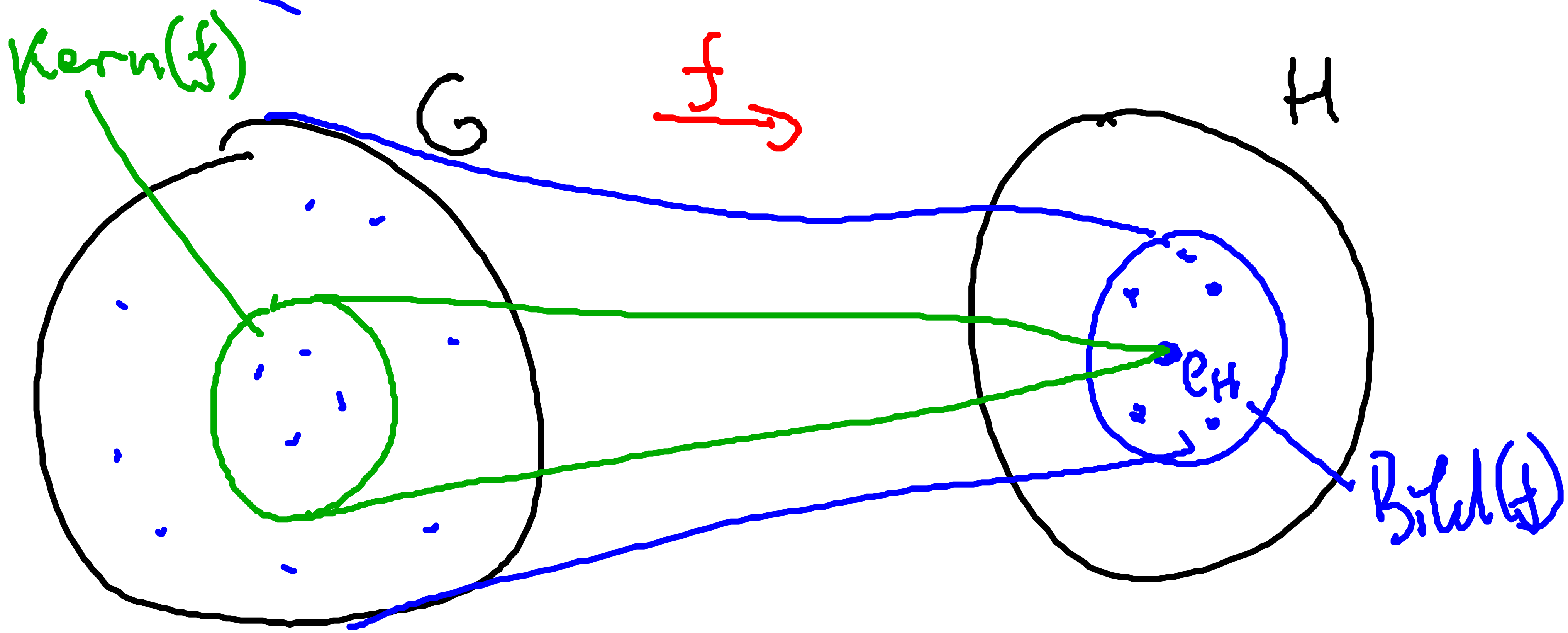
Endomorphismen: Homomorphismus von $G \to G$

Epimorphismus: surjektiver Homomorphismus

Sei f ein Homomorphismus $G \to H$

$$\mathrm{Kern}(f) = \{ g \in G \mid f(g) = e_H \} \subseteq G$$

$$\mathrm{Bild}(f) = \{ f(g) \mid g \in G \} \subseteq H$$



Lemma 1 $f(e_G) = e_H$

Bew $f(e_G) \bullet f(e_G) = f(e_G \circ e_G) = f(e_G)$

$\Rightarrow f(e_G) = e_H$

Lemma 2 $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$

Bew $f(a^{-1}) \bullet f(a) = f(a^{-1} \circ a) \Rightarrow f(e_G) = e_H$

$\Rightarrow (f(a))^{-1} = f(a^{-1})$

Satz $(\mathrm{kern}(f), \circ)$ ist Untergr. von $(G, \circ)$

Bew (0) Abgeschl. $a, b \in \mathrm{kern}(f)$

$\Rightarrow f(a) = e_H$, $f(b) = e_H \Rightarrow$

$f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b) = e_H \bullet e_H = e_H$

$\Rightarrow (a \circ b) \in \mathrm{kern}(f)$

(i) $f(e_G) = e_H \Rightarrow e_G \in \mathrm{kern}(f)$

(ii) Sei $a \in \mathrm{kern}(f)$, $f(a) \circ f(a^{-1}) = e_H$

$e_H \circ e_H = e_H$

$\Rightarrow a^{-1} \in \mathrm{kern}(f)$

(iii) Assoziativ wegen $\mathrm{kern}(f) \subseteq G$

Satz Bild(f) ist Untergruppe von $(H, \bullet)$

Bew (0) Abgeschlossenheit $a, b \in$ Bild(f)

$\Rightarrow \exists\, x, y \in G$ mit $f(x) = a$, $f(y) = b$

$a \circ b = f(x) \circ f(y) = f(x \circ y) \in$ Bild(f)

(i) Neutrales El. $f(e_G) = e_H$

(ii) Inverses El Sei $a \in$ Bild(f)

$\Rightarrow \exists\, x$ mit $f(x) = a$

$a^{-1} = f(x^{-1}) \in$ Bild(f)

(iii) Assoziativ: wegen Bild$(f) \subseteq H$

Satz Sei $(G, \circ)$ Gruppe (kommutativ) und sei $f: G \to H$ ein Homomorphismus in Gruppe $(H, \bullet)$

dann gilt:

Isomorphiesatz der Gruppenth.

$\boxed{G/_{\mathrm{Kern}(f)} \text{ ist isomorph zu } \mathrm{Bild}(f)}$

Zu Zeigen Es ex bijektiver Homomorphismus φ von $G/_{\mathrm{Kern}(f)}$ nach $\mathrm{Bild}(f)$

Wir brauchen

$$\varphi : G/\underset{\Uparrow}{\mathrm{kern}(f)} \Rightarrow \mathrm{Bild}(f)$$

Nebenklassen

Sei $x \in a \circ \mathrm{kern}(f)$

$$\varphi(a \circ \mathrm{kern}(f)) = f(x)$$

Lemma 1 φ ist wohl definiert

Bew Sei $x = a \circ h_1$ und $y = a \circ h_2$, $h_1, h_2 \in \mathrm{kern}(f)$

$$f(x) = f(a \circ h_1) = f(a) \circ f(h_1) = f(a) = f(a) \circ f(h_2) = f(a \circ h_2) = f(y)$$

Lemma 2 φ ist injektiv

Sei $a \circ \ker(f) \neq b \circ \ker(f)$

$\Rightarrow \nexists\, h \in \ker(f)$ mit $a = b \circ h$

Ann $f(a) = f(b) \Rightarrow f(a) \cdot (f(b))^{-1} = e_H$

$$\Rightarrow f(a \circ b^{-1}) = e_H$$

$$\Rightarrow \underbrace{a \circ b^{-1}}_{h} \in \ker(f) \quad \lightning$$

Lemma 3 φ ist surjektiv

Sei $y = f(x) \in \mathrm{Bild}(f)$

$\Rightarrow \varphi(x \circ \mathrm{kern}(f)) = f(x) = y$

Lemma 4 φ ist Homomorphismus

$\varphi((a \circ \mathrm{kern}(f)) \circ (b \circ \mathrm{kern}(f))) =$

$\varphi((a \circ b) \circ \mathrm{kern}(f)) =$

$f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b) =$

$\varphi(a \circ \mathrm{kern}(f)) \bullet \varphi(b \circ \mathrm{kern}(f))$

Lemma 1–4

$\Rightarrow$ Isomorphie-Satz

$G/\mathrm{kern}(f) \cong \mathrm{Bild}(f)$