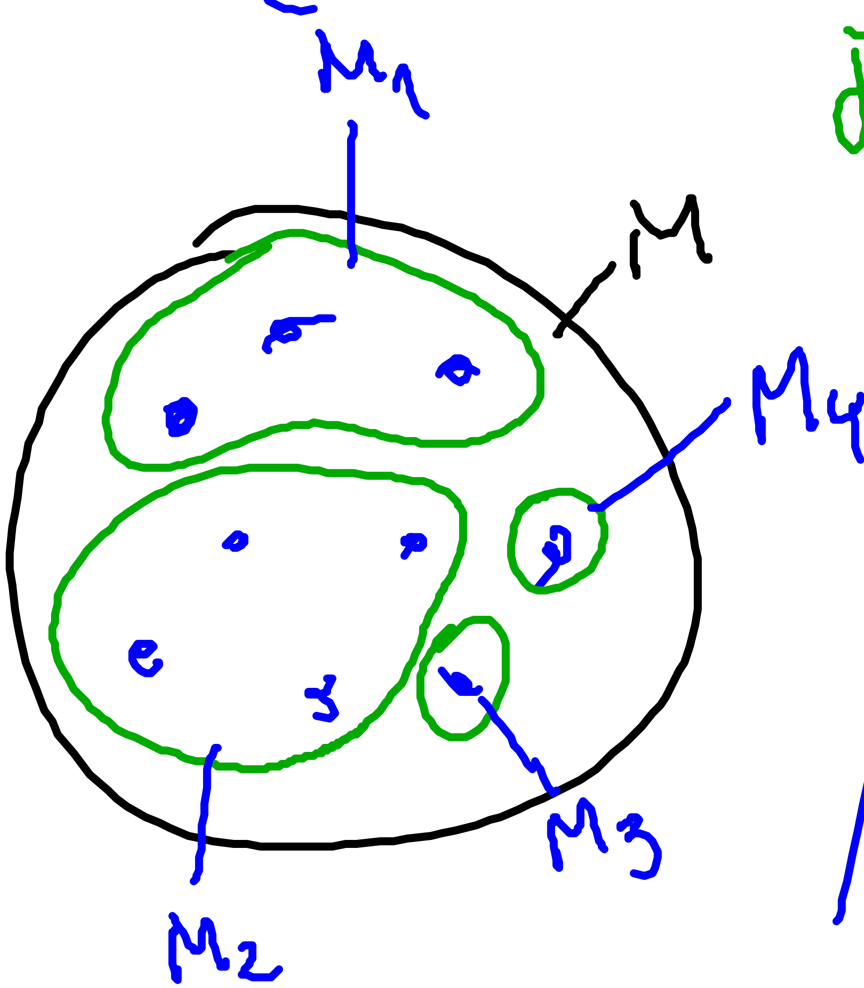
## 1.5 Nebenklassen und Quotientenräume

**Partitionen:**

Sei $M$ eine Menge und $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$
mit $M_i \cap M_j = \{\}$ für $i \neq j$

$P = \{M_1, M_2 \dots M_k\}$ heißt Partition von $M$

jedes $m \in M$ liegt in genau einem $M_i$




Partition $P \Rightarrow$ Relation $\sim_P$

$x \sim_P y$ g.d.w. Es gibt ein $i$ mit $x \in M_i$ und $y \in M_i$

(i) $x \sim_P x$ (Reflexiv)

(ii) $x \sim_P y \Rightarrow y \sim_P x$ (Symmetrie)

(iii) $x \sim_P y$ und $y \sim_P z \Rightarrow x \sim_P z$ (Transitiv)

# Äquivalenzrelationen:

zweistellige Relation $\sim$ auf der Menge $M$ heißt Äquivalenzrelation g.d.w.

- (i) $x \sim x$ für alle $x \in M$ (Refl.)
- (ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ für alle $x, y \in M$ (Sym.)
- (iii) $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ für alle $x, y, z \in M$ (Trans.)

Äquivalenzklassen von $\sim$ : $[a]_\sim := \{ m \in M \mid m \sim a \}$

| $\sim$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | X | X | | | | |
| 2 | X | X | X | | | | |
| 3 | X | X | X | | | | |
| 4 | | | | X | X | X | |
| 5 | | | | X | X | X | |
| 6 | | | | X | X | X | |
| 7 | | | | | | | X |

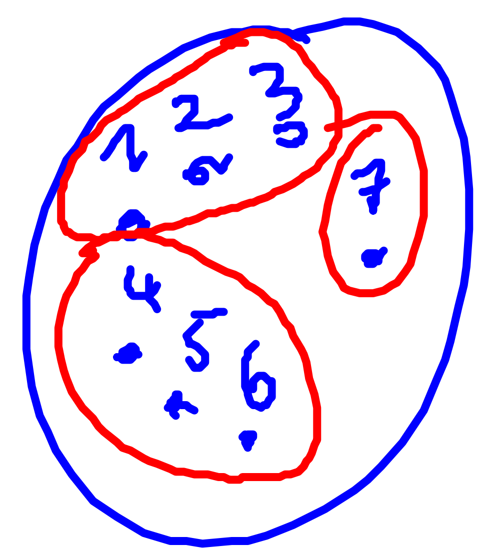
$[1]_\sim = \{1, 2, 3\}$

$[2]_\sim = \{1, 2, 3\}$

$\vdots$

$[6]_\sim = \{4, 5, 6\}$

$[7]_\sim = \{7\}$



**Satz 1** Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation dann ist $P_\sim := \{[x]_\sim \mid x \in M\}$ eine Partition.

**Lemma:** $a \sim b \Rightarrow [a]_\sim = [b]_\sim$

**Bew:** Sei $a \sim b$: 1. Zeige $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sei } c \in [a]_\sim \Rightarrow c \sim a \\ \text{Vor} \quad a \sim b \end{array}\right\} \Rightarrow c \sim b \Rightarrow c \in [b]_\sim$$

2. Zeige $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$ analog $\square$

**Bew Satz 1** Zeige 1. $\forall m \in M \; \exists x \in M$ mit $m \in [x]_\sim$

(Refl) $\Rightarrow m \sim m \Rightarrow m \in [m]_\sim$

Zeige 2 Aus $m \in [a]_\sim$ und $m \in [b]_\sim \Rightarrow [a]_\sim = [b]_\sim$

$$\left.\begin{array}{l} m \in [a]_\sim \Rightarrow m \sim a \Rightarrow a \sim m \\ m \in [b]_\sim \Rightarrow m \sim b \end{array}\right\} \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a]_\sim = [b]_\sim$$

# Nebenklassen von Untergruppen

Sei $(G,\circ)$ eine Gruppe und $(H,\circ)$ eine Untergr. von $(G,\circ)$

Sei $a \in G$: $\quad a \circ H := \{a \circ h \mid h \in H\}$ Linksnebenklassen

$H \circ a := \{h \circ a \mid h \in H\}$ Rechtsnebenklassen

Bsp $S_3 = G \qquad H = \{0,1\}$

| $\circ$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 4 | 0 | 5 | 1 | 3 |
| 3 | 3 | 5 | 4 | 0 | 2 | 1 |
| 4 | 4 | 2 | 3 | 1 | 5 | 0 |
| 5 | 5 | 3 | 1 | 2 | 0 | 4 |

$0 \circ H = \{0,1\}$ $\qquad H \circ 0 = \{0,1\}$

$1 \circ H = \{1,0\}$ $\qquad H \circ 1 = \{1,0\}$

$2 \circ H = \{2,4\}$ $\qquad H \circ 2 = \{2,5\}$

$3 \circ H = \{3,5\}$ $\qquad H \circ 3 = \{3,4\}$

$4 \circ H = \{4,2\}$ $\qquad H \circ 4 = \{4,3\}$

$5 \circ H = \{5,3\}$ $\qquad H \circ 5 = \{5,2\}$

**Satz 2** Sei $a \sim b$ definiert durch

$$a \sim b :\Leftrightarrow a \circ H = b \circ H$$

$\Rightarrow \sim$ ist Äquivalenzrelation

Bem: Diesen Beweis Funkt. für jede Abbildung

Bew (i) Reflexiv $a \circ H = a \circ H \Rightarrow a \sim a$

(ii) Symetrisch $a \sim b \Rightarrow a \circ H = b \circ H \Rightarrow b \circ H = a \circ H \Rightarrow b \sim a$

(iii) Transitiv $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \circ H = b \circ H$ und $b \circ H = c \circ H$

$\Rightarrow a \circ H = c \circ H \Rightarrow a \sim c$

Also $a \circ H = [a]_\sim =: [a]_H = \{a \circ h \mid h \in H\}$

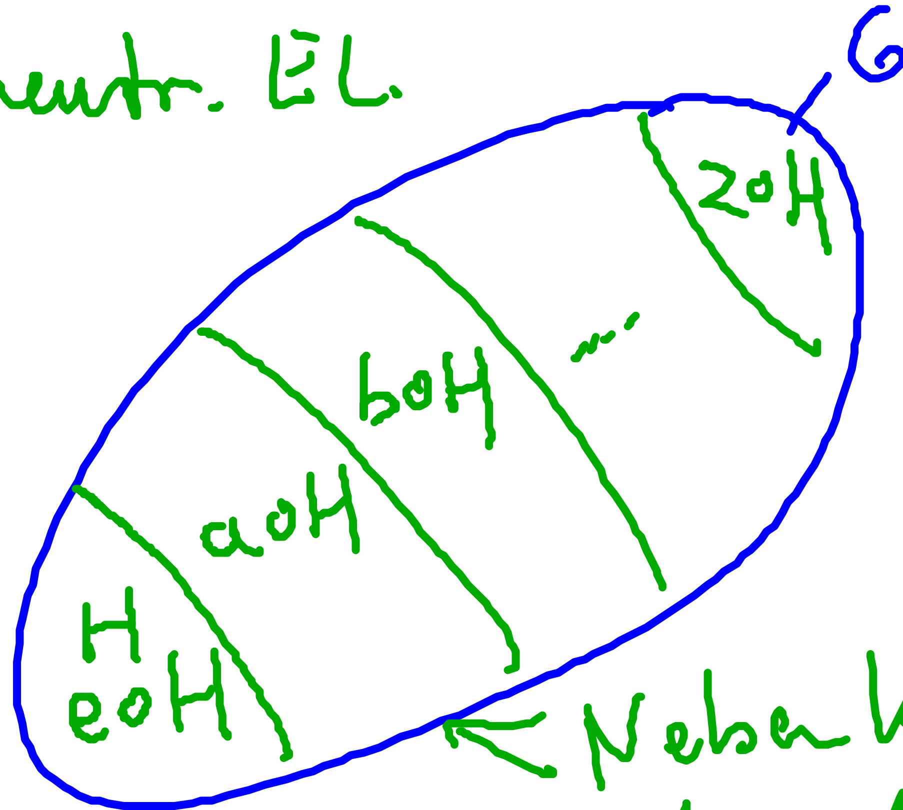
$= \{b \mid [b]_\sim = [a]_\sim\}$

Achtung

Def nur für Linksnebenklassen

$\{[a]_H \mid a \in G\}$ ist Partition von $G$

$e$ = neutr. El.




Nebenklassen haben alle die gleiche Mächtigkeit

weil $f: H \to G$, $h \mapsto a \circ h$ ist injektiv

$\Rightarrow$ Satz von Lagrange

Sei $(G,\circ)$ endliche Gruppe und $(H,\circ)$ Untergruppe von $(G,\circ)$ dann gilt:

$|H|$ teilt $|G|$

**Notation:** Seien $N_1, N_2$ Teilmengen von $G$

$$N_1 \circ N_2 = \{ n_1 \circ n_2 \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2 \}$$

**Satz 3** Sei $(G, \circ)$ kommutative Gruppe und $(H, \circ)$ Untergr.
dann gilt $a \circ H = H \circ a$

**Bew** Sei $b \in a \circ H \Leftrightarrow \exists h \in H$ mit $b = a \circ h$
$\Leftrightarrow b = h \circ a \Leftrightarrow b \in H \circ a$

**Satz 4** Sei $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe und $(H, \circ)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$

**dann:** $[a]_H \circ [b]_H = [a \circ b]_H$

Bew von $[a]_H \circ [b]_H = [a \circ b]_H$

„$\subseteq$": Sei $x \in (a \circ H) \circ (b \circ H)$

$\Rightarrow \exists h_1 \in (a \circ H)\ \exists h_2 \in b \circ H$ mit $x = h_1 \circ h_2$

$\Rightarrow \exists h_1 \in H$ und $\exists h_2 \in H$ mit $x = (a \circ h_1) \circ (b \circ h_2)$

$\Rightarrow x = (a \circ b) \circ \underbrace{(h_1 \circ h_2)}_{\in H}$

$\Rightarrow x \in [a \circ b]_H$

„$\supseteq$" Sei $x \in [a \circ b]_H \Rightarrow \exists h$ mit $x = (a \circ b) \circ h$

$\Rightarrow x = (a \circ b) \circ (h \circ e) = (a \circ h) \circ (b \circ e)$

$\Rightarrow x \in (a \circ H) \circ (b \circ H)$