Satz Jedes Element der S_n $(n \geq 2)$ lässt sich als Hintereinanderausführung von Transpositionen schreiben

Veranschaulichung des Beweises am Beispiel

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = (3,5) \circ \pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = (3,4) \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

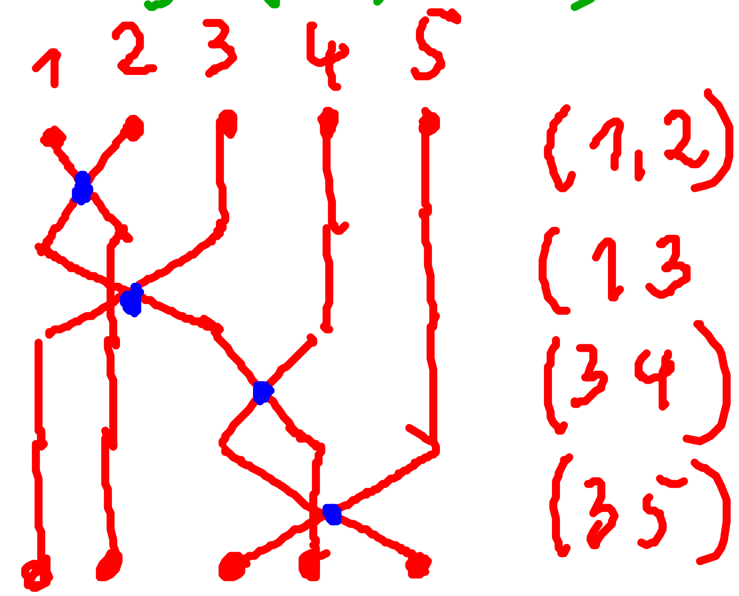
$$\pi_3 = (1,3) \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = (1,2)$$

$$\pi_0 = (3,5) \circ \pi_1$$
$$= \boxed{(3,5) \circ (3,4) \circ (1,3) \circ (1,2)}$$

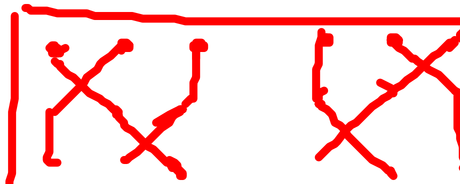
$$\pi_1 = (3,4) \circ \pi_2 = (34) \circ (13) \circ (12)$$

$$\pi_2 = (1,3) \circ \pi_3 = (13) \circ (12)$$



$(i, i+1)$ benachbarte Transposition

Satz Jedes $\pi \in S_n$ $(n \geq 2)$ ist Produkt benachbarter Transpositionen.

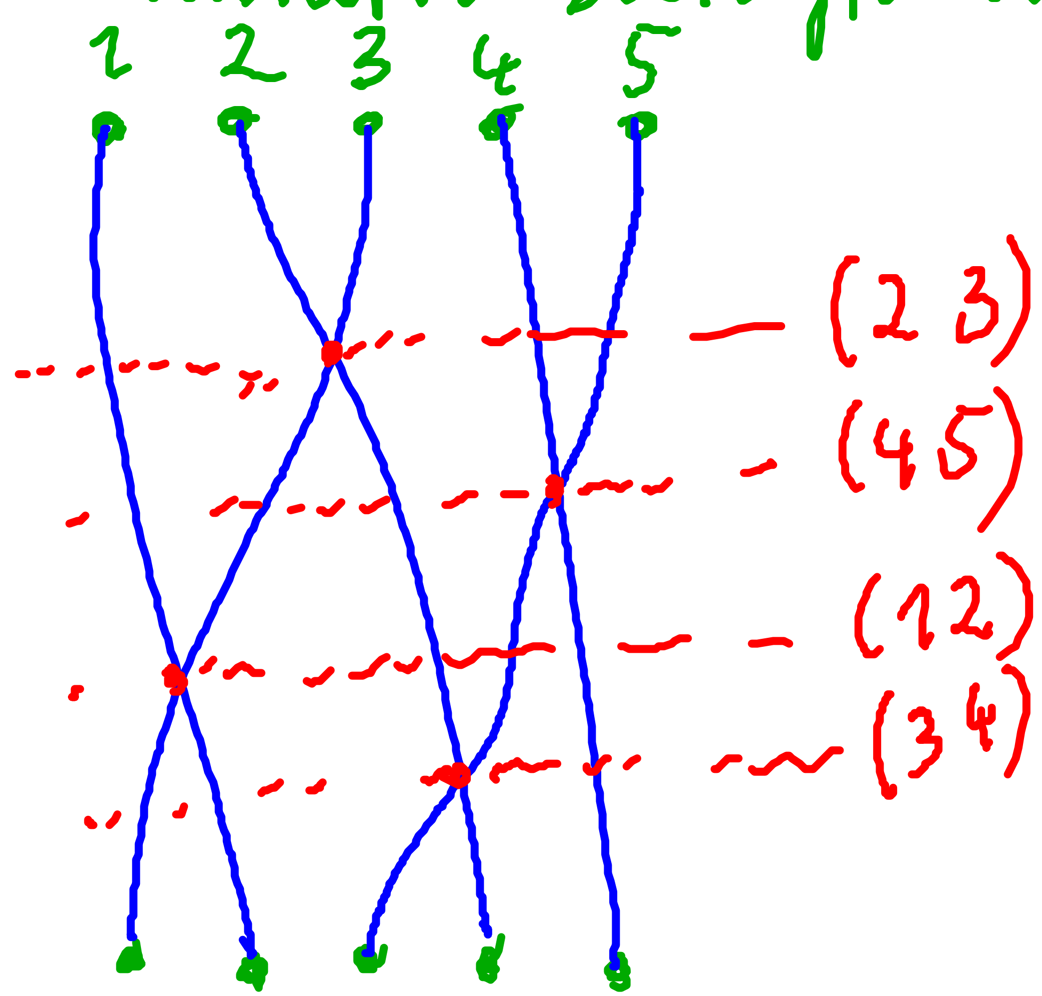


Reihenfolge ist nicht egal

Beweisidee am Beispiel

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Permutationsdiagramm



$$\pi = (3,4) \circ (1\,2) \circ (4\,5) \circ (2\,3)$$

Satz 1 Wenn $\pi = (i_1, j_1) \circ (i_2, j_2) \circ \dots \circ (i_m, j_m)$
$= (i'_1, j'_1) \circ (i'_2, j'_2) \circ \dots \circ (i'_{m'}, j'_{m'})$

Dann gilt $(-1)^m = (-1)^{m'}$

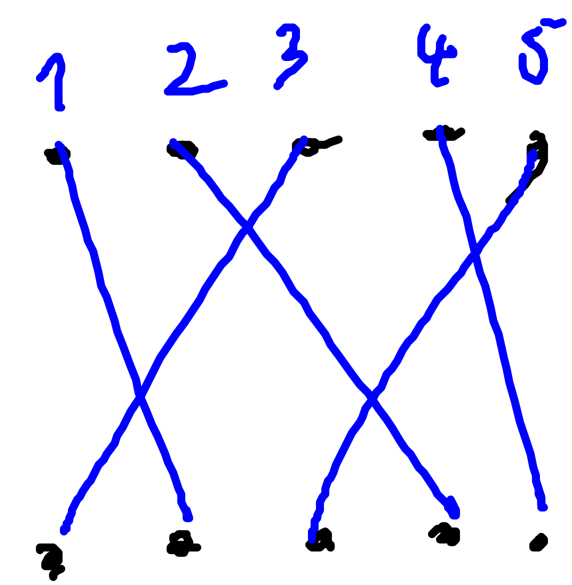
(d.h. m, m' entweder beide gerade oder beide ungerade)

Wichtigste techn. Hilfsmittel: Fehlstände

Def $FS(\pi) = \{(i,j) \in E_n^2 \mid i < j \text{ und } \pi(i) > \pi(j)\}$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \pi$

$FS(\pi) = \{(1,3), (2,3), (2,5), (4,5)\}$



Satz 2 Sei $\pi \in S_n$ und $i \in E_n$; $i < n$

Und sei $\pi' = (i, i+1) \circ \pi$

Dann gilt $\#FS(\pi) = \#FS(\pi') \pm 1$

Bew Zeige $FS(\pi)$ und $FS(\pi')$ unterscheiden sich um genau einen Fehlstand

Beobachtung: $\pi'(x) = \begin{cases} i & \text{falls } \pi(x) = i+1 \\ i+1 & \text{falls } \pi(x) = i \\ \pi(x) & \end{cases}$

Sei $r < s$ und $\{\pi(r), \pi(s)\} \neq \{i, i+1\}$

Fall 1: $(r,s) \notin FS(\pi)$

$\Rightarrow \pi(r) < \pi(s) \Longrightarrow \pi'(r) < \pi'(s) \Rightarrow (r,s) \notin FS(\pi')$

Falluntersch.

Fall 2 $(r,s) \in FS(\pi)$

$\Rightarrow \pi(r) > \pi(s) \Longrightarrow \pi'(r) > \pi'(s) \Rightarrow (r,s) \in F(\pi')$

Ferner sei $\{\pi(r), \pi(s)\} = \{i, i+1\}$, $r < s$

$\pi(r) < \pi(s) \Rightarrow \pi(r) = i, \pi(s) = i+1 \Rightarrow \pi'(r) = i+1, \pi'(s) = i$

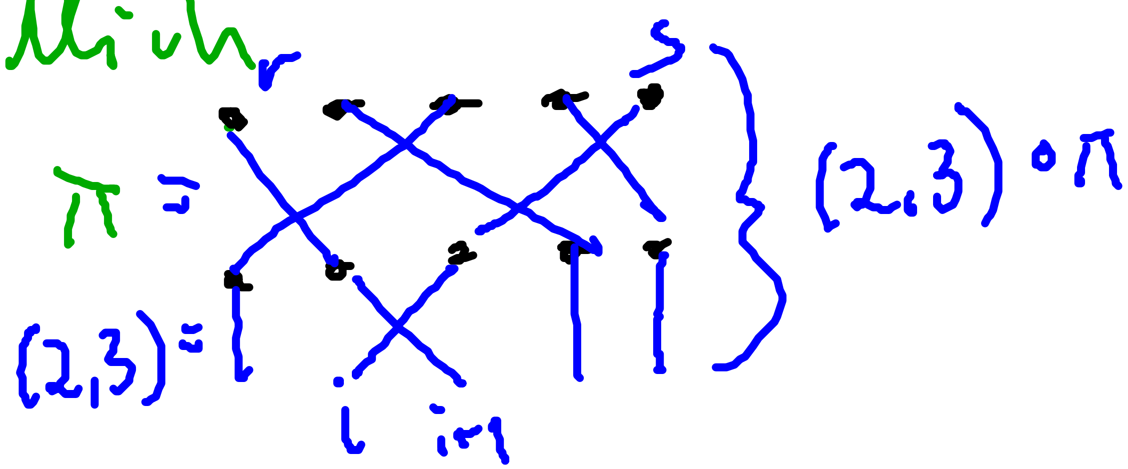
$\Rightarrow \pi'(r) > \pi'(s)$

$\pi(r) > \pi(s)$ - - - - - - - $\Rightarrow \pi'(r) < \pi'(s)$ $\square$

<u>Folgerung 3</u> Sei $\pi \in S_n$ und $\pi' = (i, i+1) \circ \pi$

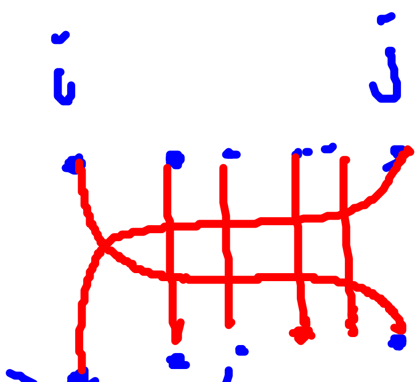
$$(-1)^{\# FS(\pi)} = -(-1)^{\# FS(\pi')}$$

Bildlich



Nachschalten einer benachbarten Transp. kann höchstens eine FS schaffen oder Aufheben

Satz 4 Sei $(i\ j)$, $i<j$ Transposition
dann kann man (i,j) als Hintereinander-
ausführung einer ungeraden Anz. benachbarten
Transp. schreiben.



Bew Induktion über $j-i=n$

Verankerung: $j=i+1$

$(i,i+1)$ ist schon unger Vert. ben. El. ✓

Induktionsschluss: sei $j-i=n$

Betrachte $(j-1,j)\circ(i,j-1)\circ(j-1,j)=(i,j)$

⇑
Nach Induktionsvoraussetzung
Produkt einer unger Anz. ben. Transp.

Satz 5 Sei $\pi = (i_1\ j_1) \circ (i_2\ j_2) \circ \ldots \circ (i_m, j_m)$

Dann gilt $(-1)^m = (-1)^{\#FS(\pi)}$

Bew Nach Satz 4 ist (i_k, j_k) Produkt einer unger. Anz. ben. Transp.

Also OBdA: $\pi = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_\ell$ mit

t_i ist benachbarte Transp für $i = 1 \ldots \ell$

und $(-1)^m = (-1)^\ell$

Vollst. Ind über ℓ liefert das Erg.

Verankerung: Sei $\pi = t_1$ $\quad \#FS(\pi) = 1$ ✓

Schluss: Sei $\pi = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_\ell$

Betrachte $\pi' = t_2 \circ t_3 \ldots t_\ell \Rightarrow$ Ind vor: $(-1)^{\ell-1} = (-1)^{\#FS(\pi')}$

$\Rightarrow -(-1)^{\ell-1} = (-1)^{\#FS(t_1 \circ \pi')}$ (Folgerung 3)

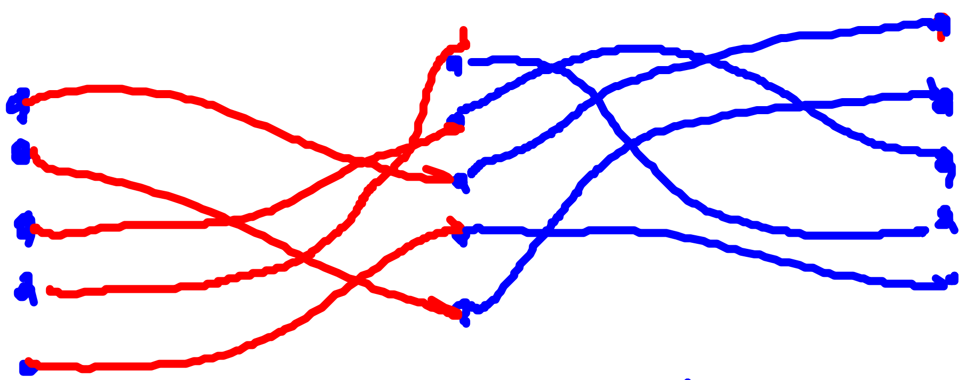
$$\Rightarrow \boxed{(-1)^\ell = (-1)^{\#FS(\pi)}}$$

Satz 1 ist eine direkte Konsequenz von Satz 5.

Man nennt $(-1)^{\# FS(\pi)}$ das Signum von π

Bildhafte Begründung

$$\left.\begin{aligned} \pi &= (i_1, j_1) \circ \ldots\ldots \circ (i_m, j_m) \,. \\ \pi &= (i'_1, j'_1) \circ \ldots \circ (i'_{m'}, j'_{m'}) \\ \pi^{-1} &= (i'_{m'}, j'_{m'}) \circ \ldots \circ (i'_1, j'_1) \end{aligned}\right\} \text{alles benachbarte Transp}$$



π π

Behalte Paare von Bonds