Permutationsgruppen

Beisp. S_3 = Alle Bijektionen $\pi: E_3 \to E_3$

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

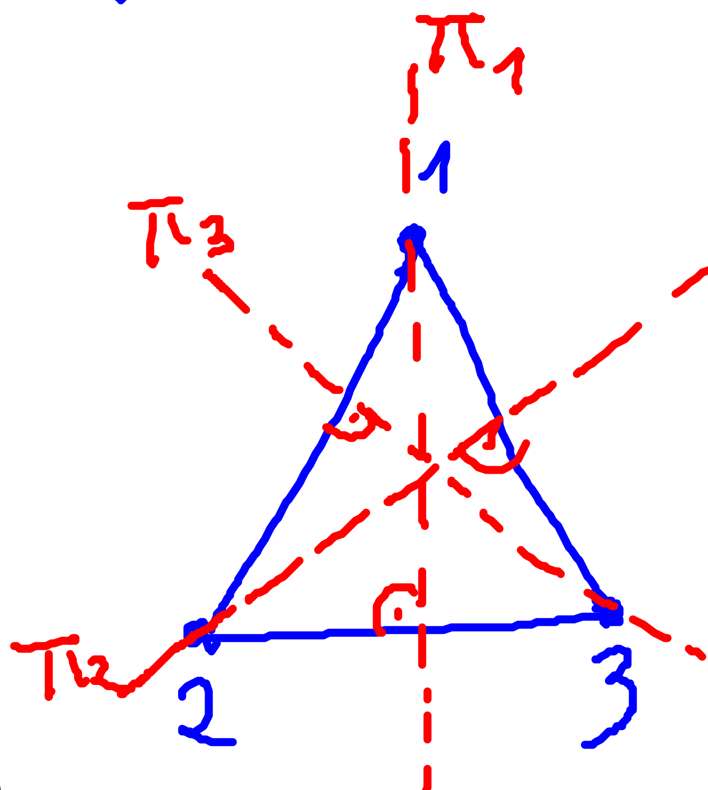
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$(S_3, \circ) \cong$ Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks



π_0 = liegen lassen

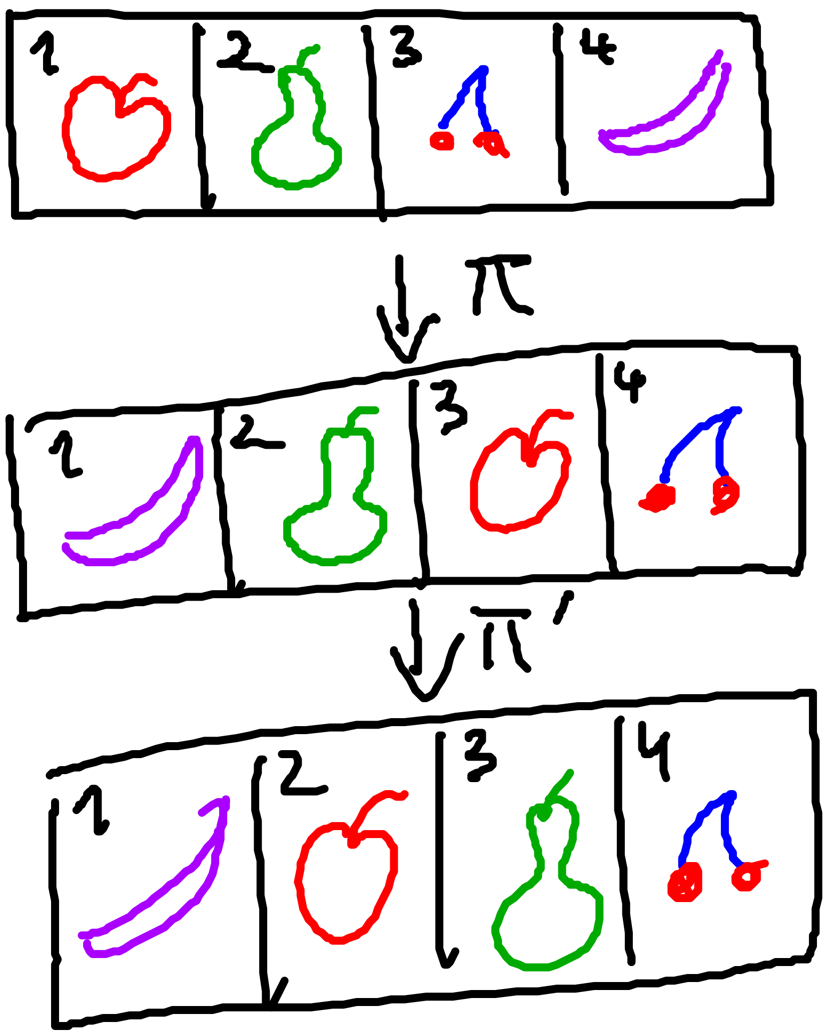
π_i = Spiegelung an Höhe durch i, $i = 1, 2, 3$

$\pi_4 = \circlearrowright$ im Uhrz. um 120°

$\pi_5 = \circlearrowleft$ gegen Uhrz. um 120°

Permutationen und Bewegungen

n-Kästchen Durchnummeriert

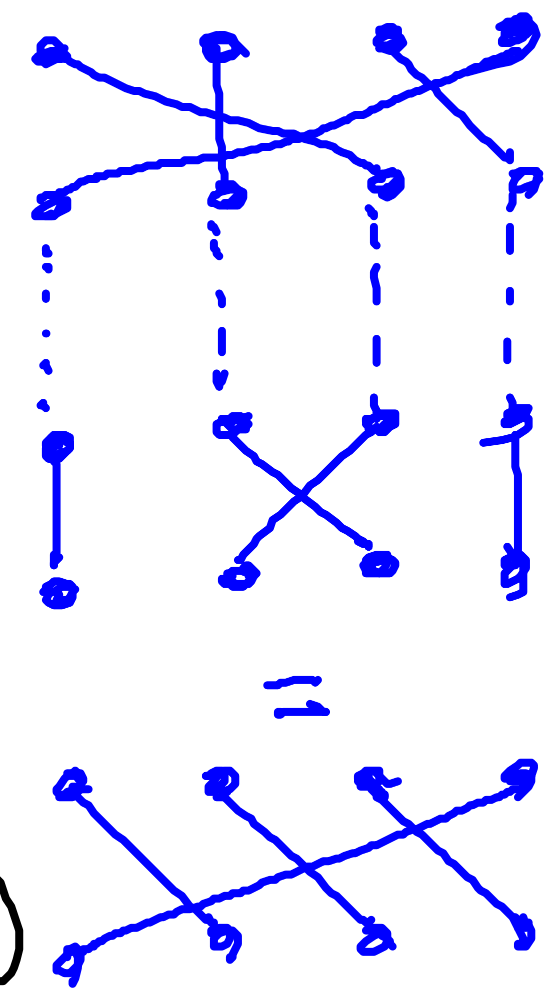


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \pi$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \pi'$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (\pi' \circ \pi)$$

Permutationsdiagramme



Untergruppen:

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $G' \subseteq G$
Ist $(G', \circ)$ auch eine Gruppe so nennt man
sie Untergruppe von $(G, \circ)$

Bsp S_3

$\circ$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	5	4	3	2
2	2	4	0	5	1	3
3	3	5	4	0	2	1
4	4	2	3	1	5	0
5	5	3	1	2	0	4

Untergruppen der S_3

$(\{0\}, \circ)$, $(\{0,1\}, \circ)$
$(\{0,2\}, \circ)$, $(\{0,3\}, \circ)$
$(\{0,4,5\}, \circ)$
$(\{0,1,2,3,4,5\}, \circ)$

Beobachtung (später Satz): Sei $(G,\circ)$ endliche Gruppe und sei $(G',\circ)$ eine Untergruppe von $(G,\circ)$ dann ist $|G'|$ Teiler von $|G|$.

Bew später in Vorlesung

Satz: Sei $G' \subseteq G$ und $(G,\circ)$ eine Gruppe
$(G',\circ)$ ist Untergruppe g.d.w.
(i) mit $a,b \in G'$ ist auch $a\circ b \in G'$
(ii) mit $a \in G'$ ist auch $a' \in G'$
(iii) $G' \neq \{\}$

Bew.
- Abgeschl. klar wg. (i)
- Assoziativ geerbt von $(G,\circ)$
- Inverses Ee klar wg. (ii)

- Neutrales El: $(iii) \Rightarrow \exists a \in G' \overset{(ii)}{\Longrightarrow} a' \in G' \overset{(i)}{\Longrightarrow} a\circ a' = e \in G'$

Satz jede endl. Gruppe mit n Elementen ist isomorph zu einer Untergruppe der S_n

Bew sei oBdA $(G,\bullet)$ endl. Gr. mit $G=\{1,2,3,\dots,n\}$

Sei $\varphi: G \to S_n$, $g \mapsto \pi_g$ $\qquad \pi_g(i)=g\bullet i$

Wir zeigen $\varphi(g\bullet h)=\varphi(g)\circ\varphi(h)$

$$\varphi(g\bullet h)(i) = \pi_{g\bullet h}(i) = (g\bullet h)\bullet i$$
$$= g\bullet(h\bullet i) = g\bullet(\pi_h(i))$$
$$= \pi_g(\pi_h(i)) = (\varphi(g)\circ\varphi(h))(i)$$

Bsp: $n=4$

$\bullet$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Permutation von (1,2,3,4)

Zyklenschreibweise

Sei $\pi \in S_n$ $\quad i \in E_n$

Die Folge

$$i \qquad \pi(i) \qquad \pi(\pi(i)) \qquad \vdots$$

$$\begin{array}{ccc} i & i & \pi^0(i) \\ \pi(i) & \pi(i) & \pi^1(i) \\ \pi(\pi(i)) & \pi(\pi(i)) & \pi^2(i) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \pi^{k-1}(i) \end{array}$$

läuft in einen Zyklus

d.h. es ex ein $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\pi^k(i) = i$$

Bsp

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \pi$$

$1 \to 2 \to 3 \to 1 \qquad (1\,2\,3)$

$4 \to 5 \to 7 \to 8 \to 4 \qquad (4\,5\,7\,8)$

$6 \to 6 \qquad (6)$

$$\pi = (1\,2\,3) \circ (4\,5\,7\,8) \circ \cancel{(6)}$$

$$(i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \dots, \pi^{k-1}(i))$$

Kurzschreibweise für die Permutation die nur diesen Zyklus hat und alles andere festlässt.

Einschub Vollständige Induktion:

Ziel: Zeige unendlich viele Aussagen

$A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots$

Verfahren: (i) Zeige A_0 (Induktionsverankerung)

(ii) Zeige „Aus A_i folgt A_{i+1}" (Induktionsschluss)

Beispiel: $\sum_{j=1}^{n} j = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n^2+n}{2}$ (A_n)

(i) Induktionsverankerung Zeige A_1

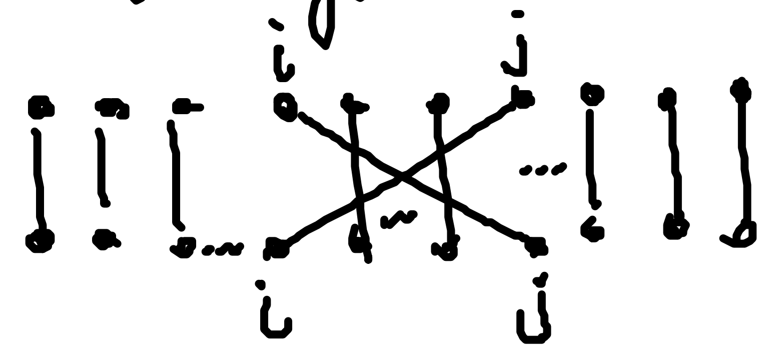
$$\sum_{j=1}^{1} j = 1 = \frac{1^2+1}{2}$$

(ii) Ind.schluss

$$\underline{\sum_{j=1}^{n+1} j} = \sum_{j=1}^{n} j + (n+1) = \frac{n^2+n}{2} + (n+1) = \frac{n^2+3n+2}{2} = \underline{\frac{(n+1)^2+(n+1)}{2}}$$

Transpositionen (Vertauschung zweier Elemente)

$$(i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix} =$$



<u>Satz</u>: Jedes Element der S_n $(n \geq 2)$ läßt sich als Hintereinanderausführung von Transpositionen schreiben.

Bew (i) Verankerung

$$S_2 = \left\{ \underset{\pi_1 \circ \pi_1}{\underset{\shortparallel}{\overset{\pi_0}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}}}, \overset{\pi_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

(ii) Induktionsschluss

Sei $\pi \in S_{n+1}$

1. Fall $\pi(n+1) = n+1$

Betrachten die Einschränkung π' von π auf E_n

$\pi' : E_n \to E_n$ $\in S_n$ π' ist Prod von
$x \to \pi(x)$ Transpositionen

2. Fall $\pi(n+1) = k \neq n+1$

Setze $\pi_k = (k, n+1)$

$\pi' = (k, n+1) \circ \pi$

Es gilt $\pi'(n+1) = \pi_k(\pi(n+1)) = \pi_k(k) = n+1$

$\Rightarrow \pi'$ Produkt von transpos. $t_1 \circ t_2 \circ t_3 \ldots \circ t_m$

$\Rightarrow (k, n+1) \circ t_1 \circ t_2 \ldots \circ t_m = \pi$