Funktionen:

Eine Funktion ordnet jedes Element x einer Meng D (Definitionsbereich) ein Element $f(x)$ einer Menge W (Werteber.) zu.

Schreibweise: $f: D \to W$

$$x \mapsto f(x)$$

Angegeben werden Muss:
- Definitionsber
- Wertebereich
- Abb vorschrift

k-stellige Funktionen

Für $f: D \to W$ kann auch gelten

$$D = D_1 \times D_2 \times \ldots\ldots \times D_k$$

für $x = (x_1, x_2, \ldots \ldots x_k) \in D$

Schreibt man auch abkürzend

$f(x_1, x_2 \ldots x_k)$ statt $f((x_1, x_2 \ldots x_k))$

Bsp $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto 5x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$f(3,2,1) = 20$$

Hintereinanderausführung von Funktionen als „Verkettung" von Funktionen

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

$\uparrow$ f nach g

Bsp $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \to x^2$
$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \to x+1$

$f \circ g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto (x+1)^2$

Funktionen verketten ist assoziativ:

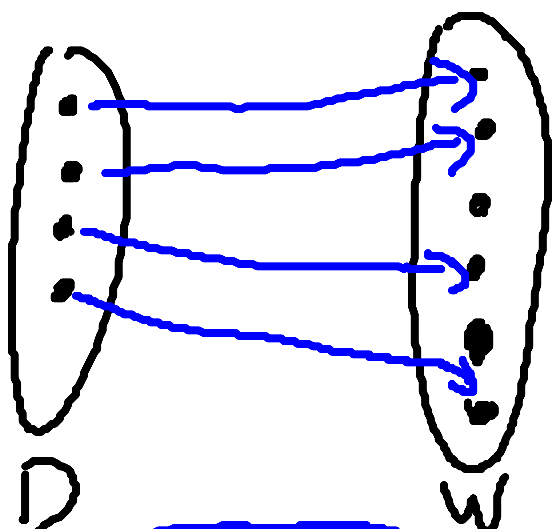
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Beweis siehe Übung

Injektiv, Surjektiv, bijektiv

Sei $f: D \to W$

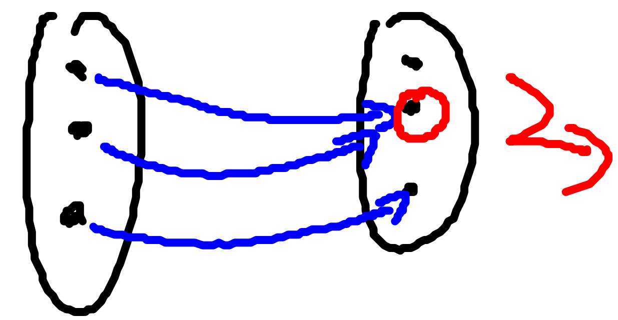
f ist injektiv wenn für $x, y \in D$ mit $x \neq y$ auch $f(x) \neq f(y)$ gilt



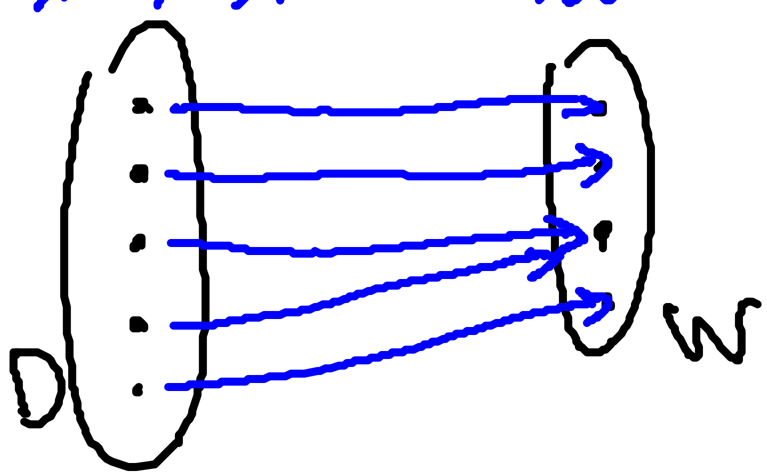
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$ injektiv

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$ nicht inj

Verboten



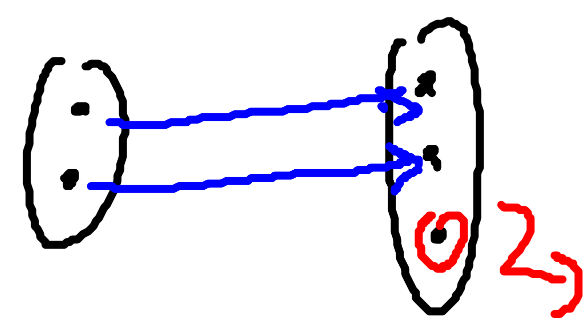
f ist surjektiv wenn für jedes $y \in W$ ein x existiert mit $f(x) = y$



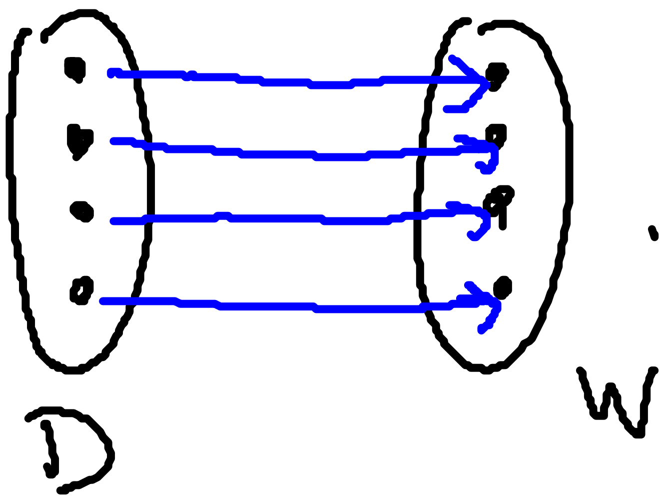
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \to x+1$ nicht surj

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \to x+1$ surj

Verboten



f ist bijektiv wenn es injektiv und surjektiv ist



Einige Tatsache

- Wenn $f: X \to Y$ bijektiv ist und X endlich dann $|X| = |Y|$
- Ist $f: X \to Y$ bijektiv so existiert eine Umkehrabb. $f^{-1}: Y \to X$

$\boxed{|X| = \text{Anz. d. El in } X}$

- Ist $|X| = |Y|$ endlich so ist gleichwertig
  - f ist injektiv
  - f ist surjektiv
  - f ist bijektiv
- Ist $f: X \to Y$ bij und $g: Y \to Z$ bij so ist $g \circ f$ bijektiv

Gruppen etwas formaler:

$(G, \circ)$ ist eine Gruppe wenn $\boxed{\circ : G \times G \to G}$ Abbildung ist mit:

(i) ----

(ii) ----

(iii) ----

Gruppenisomorphie (Strukturgleichheit)

$(G, \circ)$ und $(H, \bullet)$ sind isomorph wenn Bijektion $\varphi : G \to H$ existiert mit

$\forall x, y \in G$ gilt $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \bullet \varphi(y)$

Die Beiden Gruppen sind bis auf Umbenennung gleich

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$G = \{0, 1, 2\}$

$\varphi: G \to H$

$0 \mapsto r$

$1 \mapsto g$

$2 \mapsto b$

$\bullet$	r	g	b
r	r	g	b
g	g	b	r
b	b	r	g

$H = \{r, g, b\}$

Bsp für zwei Elemente $g_1 = 1$, $g_2 = 2$

$$\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2)$$

$$= \varphi(1 \circ 2) \qquad = \varphi(1) \bullet \varphi(2)$$

$$= \varphi(0) \qquad = g \bullet b$$

$$= r \qquad = r$$

2. Beispiel

$(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ sind isomorph

$\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

Bew: Betrachte folgende Bijektion

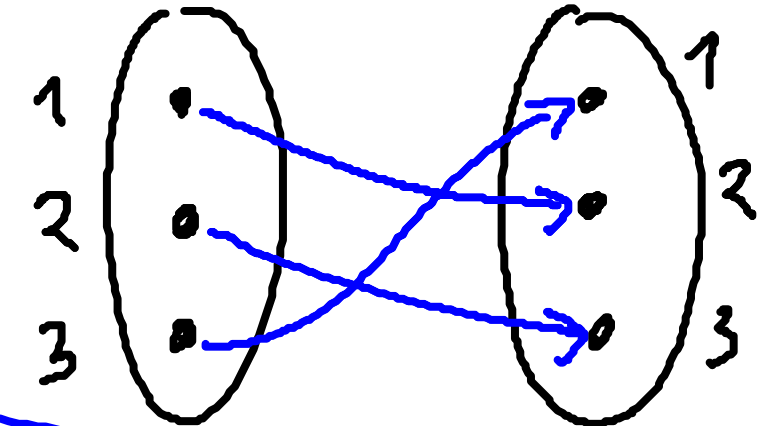
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$a \to e^a$$

$$\underline{\varphi(a+b)} = e^{(a+b)} = e^a \cdot e^b = \underline{\varphi(a) \cdot \varphi(b)}$$

1.4 Permutationsgruppen
(Vertauschungsgruppen, Symmetrische Gruppen)

Sei $E_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$

$\pi : E_n \to E_n$ mit π ist bijektiv nennt man Permutation



Bsp $E_3 = \{1, 2, 3\}$

$\pi(1) = 2$
$\pi(2) = 3$
$\pi(3) = 1$

$\pi'(1) = 1$
$\pi'(2) = 3$
$\pi'(3) = 2$

Hintereinanderausführung

$(\pi' \circ \pi)(x) = \pi'(\pi(x))$

$(\pi' \circ \pi)(1) = 3$
$(\pi' \circ \pi)(2) = 2$
$(\pi' \circ \pi)(3) = 1$

Häufige Schreibweise Wertetabelle

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Satz: Die Menge der Permutationen S_n von $E_n \to E_n$ bildet eine Gruppe mit Hintereinanderausf. als Gruppenoper.

Bew (0) Sei $\pi_1, \pi_2 \in S_n \Rightarrow \pi_1, \pi_2$ sind Bijektionen $\Rightarrow \pi_1 \circ \pi_2$ Bijektion $\Rightarrow \pi_1 \circ \pi_2 \in S_n$

(i) $\pi_0 : E_n \to E_n$, $x \mapsto x$ ist neutr. Element

Bew: Sei $\pi \in S_n$, $x \in E_n$

$(\pi \circ \pi_0)(x) = \pi(\pi_0(x))$
$= \pi(x)$

(iii) assoziativ klar (Verk. v. Abb)

(ii) Sei $\pi \in S_n$, π^{-1} ist Inverse zu π

Bew Sei $\pi \in S_n$, $x \in E_n$

$(\pi \circ \pi^{-1})(x) = \pi(\pi^{-1}(x)) = x$ Also $(\pi \circ \pi^{-1}) = \pi_0$

$|S_1| = 1$
$|S_2| = 2$
$|S_3| = 6$
$|S_4| = 24$
$\vdots$
$|S_n| = n!$

Konkretes Beispiel S_3

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\pi_1 \circ \pi_2$

$1 \to 3 \to 2$

$2 \to 2 \to 3$

$3 \to 1 \to 1$

Inverse

a	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
a'	π_0	π_1	π_2	π_3	π_5	π_4

$\circ$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_0	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_1	π_1	π_0	π_5	π_4	π_3	π_2
π_2	π_2	π_4	π_0	π_5	π_1	π_3
π_3	π_3	π_5	π_4	π_0	π_2	π_1
π_4	π_4	π_2	π_3	π_1	π_5	π_0
π_5	π_5	π_3	π_1	π_2	π_0	π_4