letzte Stunde:

Satz 1 Aus $a \circ a' = e$ folgt $a' \circ a = e$

Jedes Rechtsinverses ist linksinverses

Satz 2 Es gilt $e \circ a = a$ für alle $a \in G$

Bew Sei a beliebig und a' invers zu a

$$
\begin{aligned}
e \circ a &\overset{(ii)}{=} (a \circ a') \circ a \\
&\overset{(iii)}{=} a \circ (a' \circ a) \\
&\overset{\text{Satz 1}}{=} a \circ e \\
&\overset{(i)}{=} a
\end{aligned}
$$

Das Rechtsneutrale ist auch linksneutrales

Satz 3/4: Für $a, b \in G$ gibt es genau ein x (y) mit $a \circ x = b$ ($y \circ a = b$)

Bew Eindeutigkeit

Ann $a \circ x = b$ und $a \circ \bar{x} = b$

$$
\begin{aligned}
a \circ x &= a \circ \bar{x} \\
\Rightarrow \quad a' \circ (a \circ x) &= a' \circ (a \circ \bar{x}) \\
(a' \circ a) \circ x &= (a' \circ a) \circ \bar{x} \\
e \circ x &= e \circ \bar{x} \\
x &= \bar{x}
\end{aligned}
$$

Existenz

Nimm $a' \circ b = x$

$$
\begin{aligned}
& a \circ x = \\
& a \circ (a' \circ b) = \\
& (a \circ a') \circ b = \\
& e \circ b = b
\end{aligned}
$$

Folgerungen

- neutrales Element ist eindeutig

  $a \circ x = a$
  $\Rightarrow x = e$
  ist eindeutig

- Inverses Element zu a ist eindeutig

- In jeder Zeile/Spalte der Verknüpfungstabelle treten alle Gruppenelemente auf

(1.3)

Mathematik aufschreiben

- Mengen
- Relationen
- Quantoren
- Funktionen

Mengen:

- Zusammenfassung mehrerer unterscheidbaren Objekte zu einem Ganzen (auf Reihenfolge kommt es nicht an)

- Angabe durch endliche Aufzählung

  $M = \{7, 10, 23, 42\}$

- Angabe durch unendliche Aufzählung (nur wenn Regel klar erkennbar)

  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

  $M = \{3, \cancel{17, 19}, 35, \ldots\}$

Angabe durch Eigenschaften, und einer Grundmenge.

$M = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5 \text{ und } x < 10\} = \{6, 7, 8, 9\}$

so dass

$M = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$

- Die leere Menge: $\{\} = \emptyset$

Mengenoperationen:

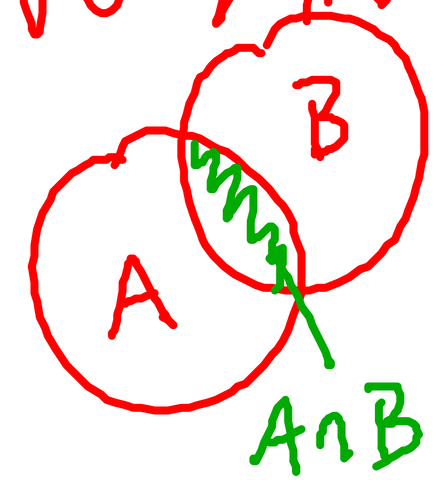
• Elementrelation: $e \in M$

ist Element von

z.B. $5 \in \mathbb{N}$ $\sqrt{5} \notin \mathbb{N}$

• Schnitt $A \cap B$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$



• Vereinigung $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

- Deletion $A \setminus B$ (manchmal $A - B$)

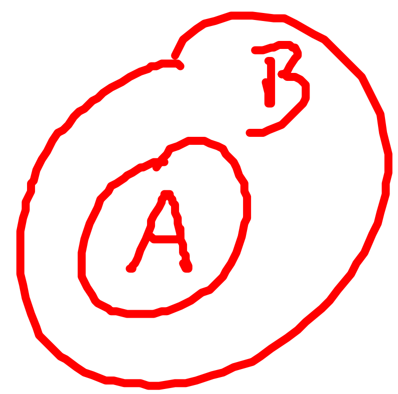
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

ist Teilmenge von

- Enthalten sein $A \subseteq B$ g.d.w.

  Für alle $x \in A$ gilt auch $x \in B$

insb. ist die leere Menge Teilmenge jeder Menge



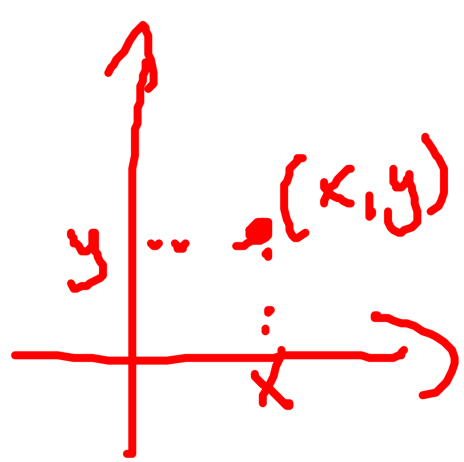
Mengenprodukt $A \times B$ (Paarbildung)

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, \ b \in B \}$$

Bsp: $A = \{\text{rot}, \text{grün}\}$ $B = \{\text{iPod}, \text{Socken}\}$

$$A \times B = \{ (\text{rot}, \text{iPod}), (\text{rot}, \text{Socken}), (\text{grün}, \text{iPod}), (\text{grün}, \text{Socken}) \}$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alle Paare (x, y) mit $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$



- Potenzmenge von A : 2^A oder $\mathcal{P}(A)$

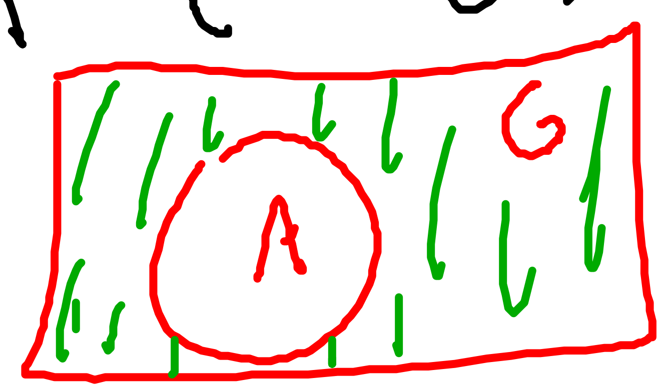
Menge aller Teilmengen von A

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Bsp $2^{\{1,2,3\}} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

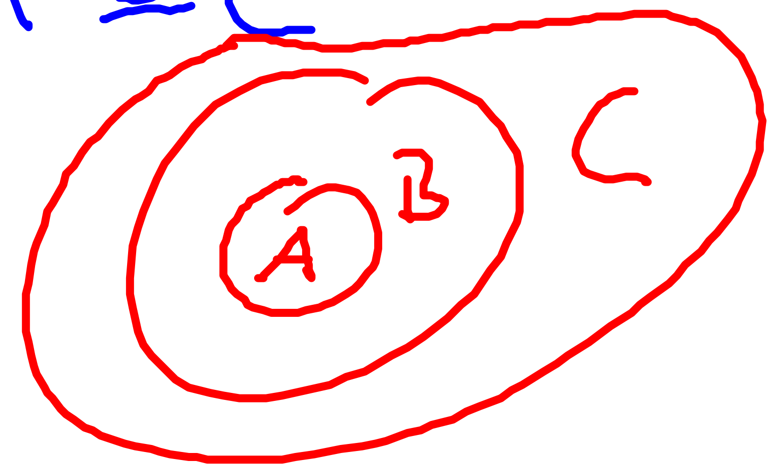
Komplement bzgl. Grundmenge G

$$\overline{A} = \{x \in G \mid x \notin A\}$$



Mengengesetze (exemplarisch)

- $A \subseteq B$ und $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

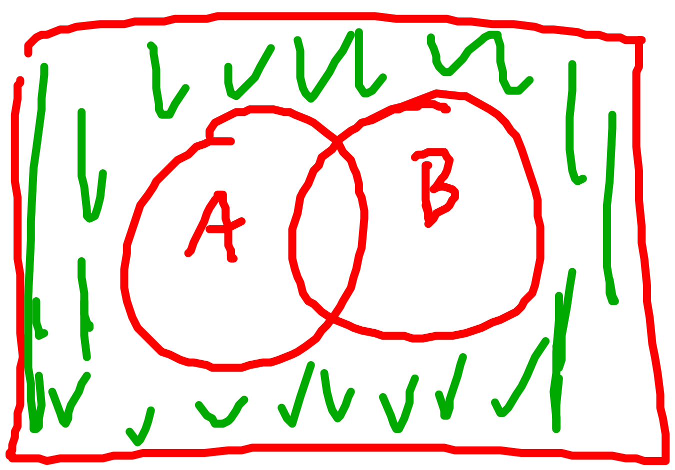


- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Morgan Regeln

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$



Die „naive Mengendefinition" hat ihre Tücken

Sei M die Menge aller Mengen die sich nicht selbst enthalten

Enthält M sich selbst:

Ann. „Ja": ⇒ M enthält sich nicht ↯

Ann. „Nein" ⇒ M enthält sich ↯

Zwei Auswege: Stufentheorie für Mengen

Menge eine Stufe dürfen nur Mengen niedriger Stufe enthalten

Axiomatisch syntaktisch „Zermelo Frankelsche Axiome"

Relationen:

Beziehungen (Eigenschaften) die zw. Objekten gelten können
Relationen angewendet auf konkreten Objekten können „wahr“ oder „Falsch“ sein

Bsp $x < y$ | zweistellige Relation

$5 < 3$ falsch
$3 < 5$ wahr

x ist Primzahl | einstellige Operation

Häufig identifiziert man Relationen mit entsprechenden Teilmengen

Bsp $x < y$ mit $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$

$<$	0	1	2	3	...
0		×	×	×	...
1			×	×	...
2				×	...
3					...
⋮					

Entsprechende Menge:

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\} =$$

$$\{(0,1),(0,2)\ldots\ldots,(1,2),(1,3)\ldots\ldots\}$$

Quantoren

$\forall x : \text{Aussage}(x)$

evtl. mit Grundmenge

Für alle x gilt Aussage(x)

$\forall x \in \mathbb{N} : x \leq x^2$

$\exists x : \text{Aussage}(x)$

Es gibt ein x mit Aussage(x).

$\forall x \in \mathbb{N} : (\exists y \in \mathbb{N} : x < y)$

Gruppenaxiome:

(i) $\exists e \in G : (\forall a \in G : a \circ e = a)$

(ii) $\forall a \in G : (\exists a' \in G : a \circ a' = e)$

(iii) $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

Funktionen

Eine Funktion ordnet jedem El einer Menge D ein Element einer anderen Menge W zu.

Schreibweise: $f: D \to W$
$x \mapsto \ldots$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto x^2$

$f(5) = 25$