Listen in 02.06.051

Bitte eintragen bis 28.10.2005

Lineare

Algebra

Gerd Fischer

vieweg

Lineare Algebra ⟵ Was?

Warum?

+ analytische Geometrie

- Geradlinig
- Strukturth. von Punkten, Geraden, Ebenen .....
- Polynome vom Grad 1 in jeder Variable

- Rechnen mit abstrakten Strukturen
- Strukturtheorie des Rechnens
- Axiomatische Grundlegung

Was?

zentrale Begriffe

- Vektorraum V
- Vektor $v \in V$
- Lineare Abbildungen $f: V \to W$
  $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\lambda \cdot x) = \lambda f(x)$
- Kern einer Abb.
  $\{x \in V \mid f(x) = 0\}$

Beispiele (Konkrete Objekte)

- $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$, Menge aller Polynome
- z.B. dreidimensionale reelle Vektoren
  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2.7 \\ 3.141 \end{pmatrix}$
- Matrizen
  z.B. 3x2 Matrix
  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$
  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{pmatrix}$
- Lösen von Gleichungssystemen

Zentrale Problemstellungen.

- Strukturtheorie

  Am Anfang stehen gut motivierte Axiome

  ⋮

  Was folgt aus diesen Axiomen?

  ⋮

  Welche Begriffe lohnt es noch einzuführen?

- Innermathematische Beispiele
  (Welche VR gibt es, welche Besonderheiten haben die)

- Außermathematische Beispiele
  (Wo läßt sich ein Problem durch VR modellieren?)

- Algorithmen

Warum?

- Weitreichende Strukturelle Erkenntnisse
- LA ist algorithmisch gutartig
- Lösungsgebilde sind gutartig
- Viele Probleme in der ....
  .... Mathematik, Physik, Informatik ...,
  sind linear
- Viele Probleme ..... werden linearisiert

- Stückweise lineare Ansätze

Einige Beispiele

Wir nehmen den Apparat der LA als „Blackbox"
(Gleichungen lösen, lineare Abb, ...)

1. Beispiel: Geometrische Transformationen

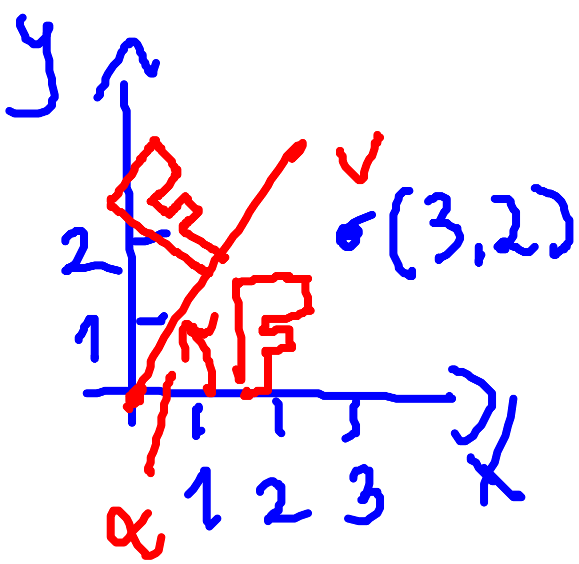


Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Drehung:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

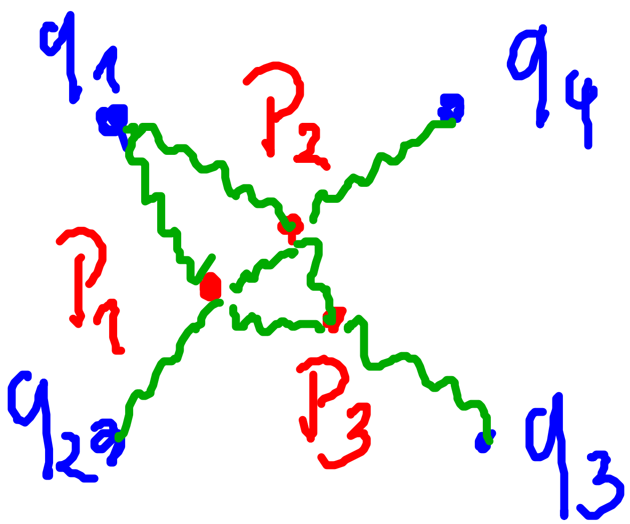
M_α

$v \mapsto M_\alpha \cdot v$

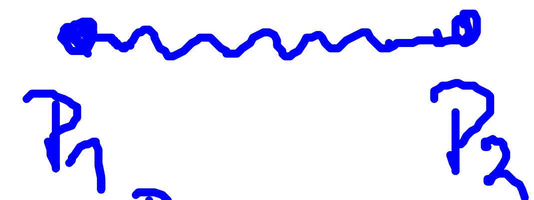
Inverse von M_α ist $M_{-\alpha}$

2. Beispiel

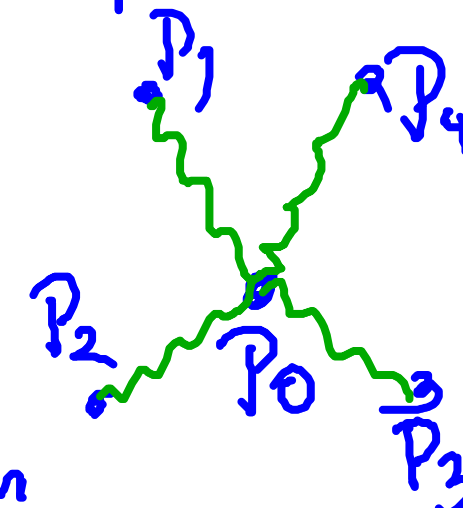
Aus der Physik: Federnetzwerke



Federkraft: $F = h(P_2 - P_1)$



Gleichgewicht:

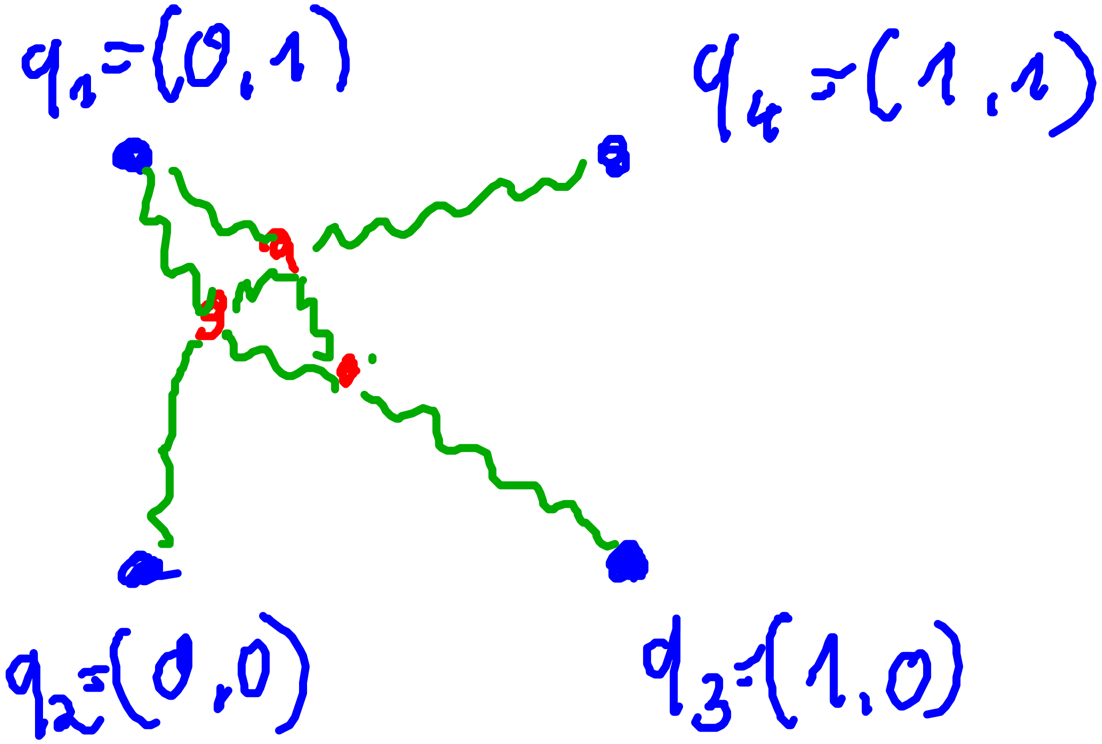


$$F_{ges} = \sum_{i=1}^{n} h_{i0}(P_i - P_0) = 0$$

$h = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} q_1 + q_2 + P_2 + P_3 - 4 \cdot P_1 &= 0 \\ q_1 + q_4 + P_1 + P_3 - 4P_2 &= 0 \\ q_3 + P_1 + P_2 - 3P_3 &= 0 \end{aligned}}$$

Sechs Gleichungen in sechs Unbekannten.



x-Koordinate | y-Koord

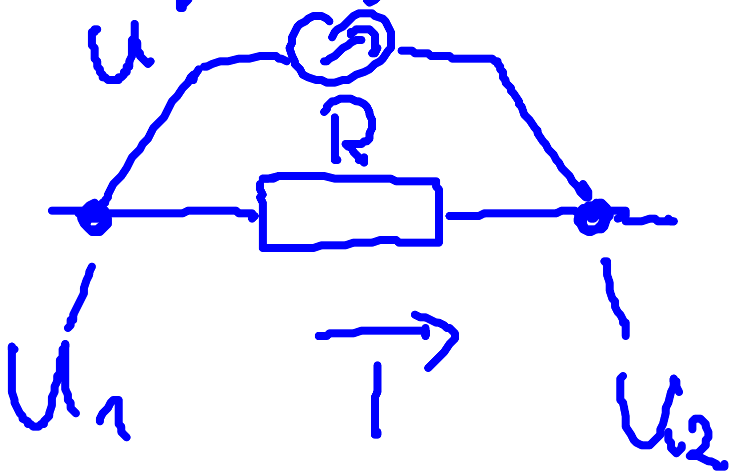
$$x_3 + x_2 - 4x_1 = 0$$

$$x_1 + x_3 + 1 - 4x_2 = 0$$

$$x_1 + 1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

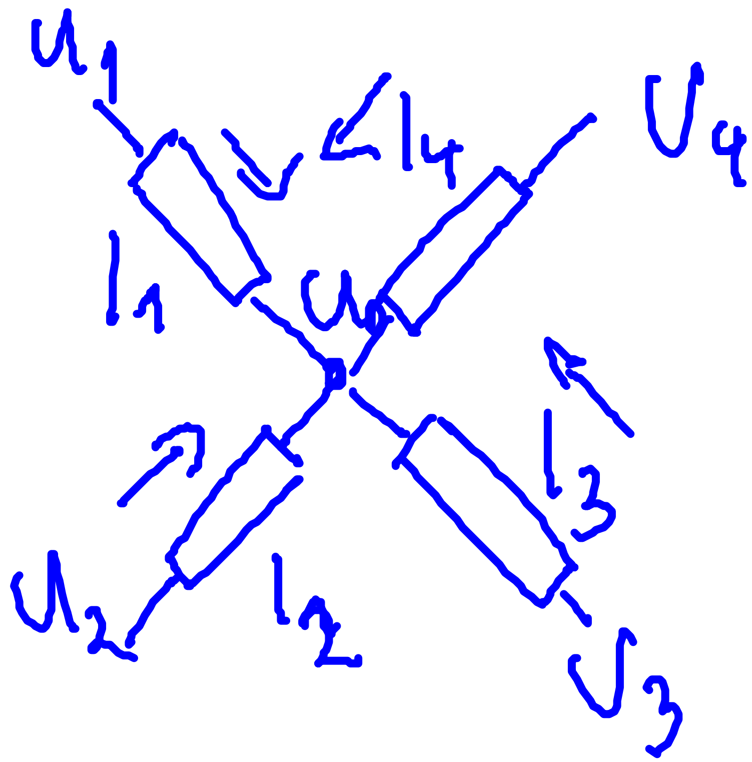
$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Widerstandsnetzwerke:



$$(U_2 - U_1) = R\,I$$

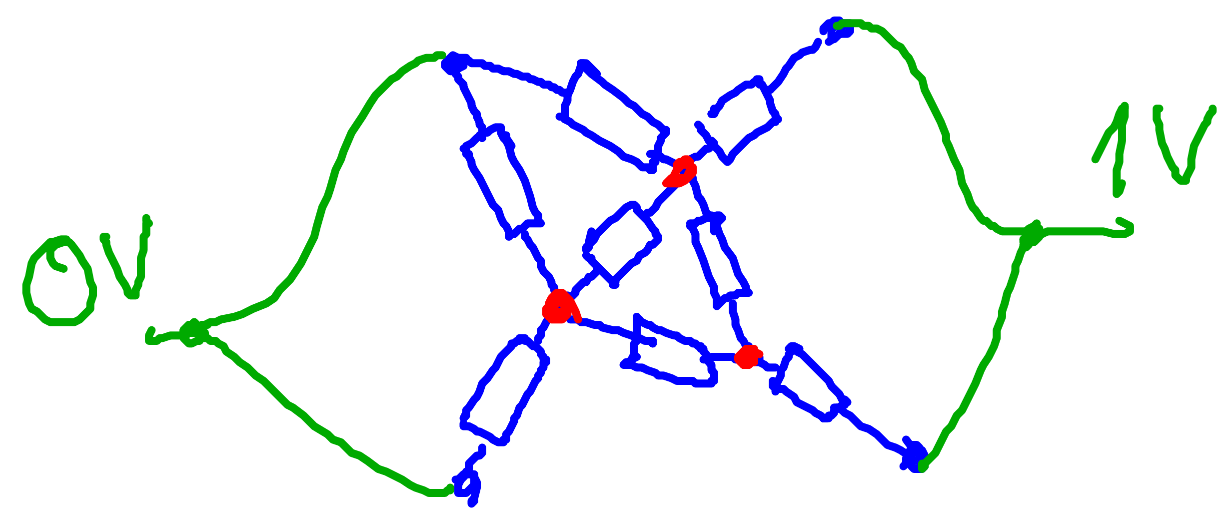
Ohm'sches Gesetz



$$\sum I_i = 0$$

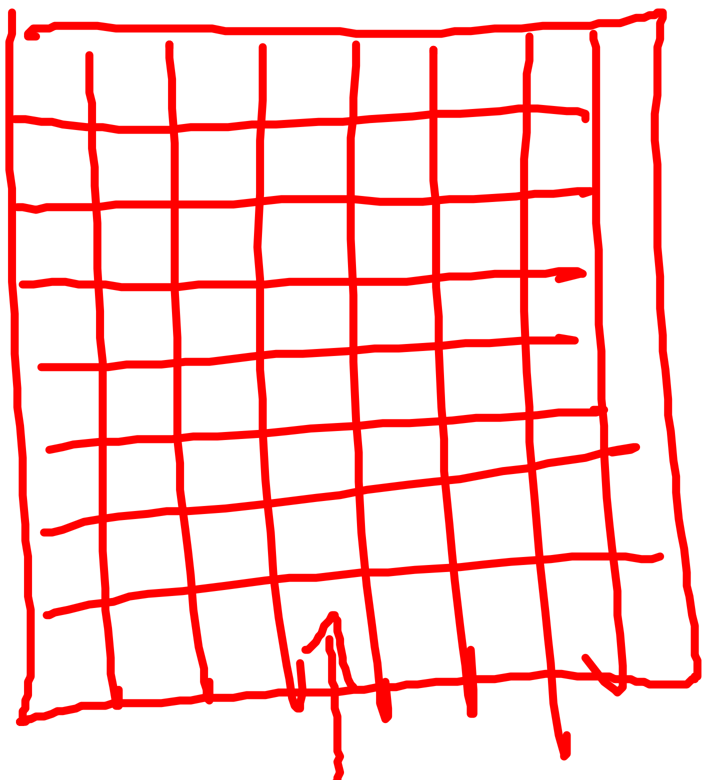
Kirchhof'sches Gesetz

$$\sum \frac{1}{R_{0i}} (U_i - U_0) = 0$$



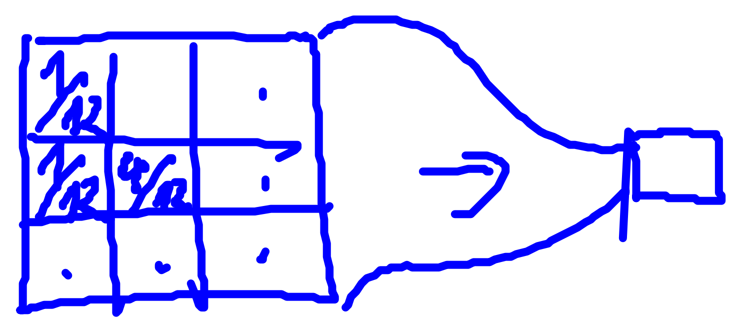
3. Beispiel Bildverarbeitung

Pixelbild (Graubild



Grauwert Zahl $\in \mathbb{R}$

Weichzeichner:



$\cdot = \frac{1}{12}$

Lineare Abbildung