TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
**Zentrum Mathematik**

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

# Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)

## — Aufgabenblatt 12 (30. Januar 2006) —

### — *Multiple choice - Aufgaben* —

**M 92.** Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

- □ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- □ $A^2 + B^2 = 0 \Longrightarrow A = B = 0$
- □ $AB = 0 \Longrightarrow BA = 0$
- □ $BA = 0 \Longrightarrow (AB)^2 = 0$

Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle invertierbaren Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

- □ $A = A^T \Longrightarrow A^{-1} = (A^{-1})^T$
- □ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- □ $(A-B)^{-1} = (A+B)(A^2 - B^2)^{-1}$
- □ $(A^{-1})^5 = (A^5)^{-1}$

### — *Präsenzaufgaben* —

**P 93. Invertieren**

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \lambda \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar? Geben Sie $A^{-1}$ für $\lambda = 3$ explizit an und machen Sie die Probe.

**P 94.** Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $L_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$,

$L_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$, $0 \neq A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^3$.

1. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ für das sowohl $L_1$ als auch $L_2$ Lösungsmenge ist?
2. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem aus 1) durch Vorgabe des Bildvektors von $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d.h. durch Vorgabe eines $c \in \mathbb{R}^3$ mit $c = Ae_2$) eindeutig bestimmt ist.

**P 95.** Schreiben Sie die elementaren Zeilenumformungen, wie sie beim Gauß-Algorithmus auftreten, als Matrixmultiplikation. Stellen Sie analog dazu elementare Spaltenumformungen als Matrixmultiplikation dar.

### — *Hausaufgaben* —

**H 96.** Die Matrizen $A$, $B$, $C$ und $D$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie (sofern möglich) alle Matrizenprodukte $XY$ mit $X, Y \in \{A, B, C, D\}$.

**H 97.** Invertieren Sie, wenn möglich, folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

**H 98.** Berechnen Sie abhängig von $\alpha \in \mathbb{R}$ den Rang $rg(A)$ und die Dimension $dim(Kern(A))$ sowie je eine Basis von $A(\mathbb{R}^4)$ und $Kern(A)$ für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha \\ -1 & 3 & \alpha - 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

**H 99.** Sei $K$ ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Für alle $B \in K^{n\times n}$ gelte $AB = BA$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $\alpha \in K$, so dass $A = \alpha \cdot E_n$. ($E_n$ bezeichne dabei das Einselement aus $K^{n\times n}$.)
Tip: Setzen Sie für $B$ Matrizen ein, die nur einen von Null verschiedenen Eintrag haben.

**H 100.** Berechnen Sie die Determinanten von $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

**Abgabetermin ist der 06.02.2006 in der Zentralübung**.