TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)
— Aufgabenblatt 11 (23. Januar 2006) —

— Multiple choice - Aufgaben —

M 83. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Bedingungen sind *hinreichend* dafür, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung besitzt?

- ☐ A ist invertierbar.
- ☐ A ist die Einheitsmatrix.
- ☐ $n > m$.
- ☐ $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b)$.
- ☐ Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig.
- ☐ Die Zeilenvektoren sind linear unabhängig.
- ☐ $n = m$.
- ☐ $b = 0$.
- ☐ $n < m$ und $\operatorname{rang}(A) = n$.

— Präsenzaufgaben —

P 84. Sei M die Menge der linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $ad - bc \neq 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass M bzgl. der Komposition $\circ$ eine Gruppe ist.

P 85. Sei $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1, x_2)$.

1. Man gebe eine Basis von $Kern(f)$ an.
2. Man gebe den Faktorraum $\mathbb{R}^4/Kern(f)$ sowie eine Basis dafür an.
3. Wie lässt sich der Faktorraum und seine Elemente im Schnitt des $\mathbb{R}^4$ mit $x_1 = 0$ bzw. $x_4 = 0$ geometrisch deuten? Geben Sie speziell die Nebenklasse $[(0, 3, 0, 0)]_{Kern(f)}$ an.

P 86. Rundungs-Probleme. Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystem $Ax = b_\varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^4$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 10 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_\varepsilon = \begin{pmatrix} 15+\varepsilon \\ 15+\varepsilon \\ 26+\varepsilon \\ 15+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Was fällt auf, wenn sie die Fälle $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und $\varepsilon = 1$ betrachten?

— Hausaufgaben —

H 87. Wie viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(2,0) = (0,4), \qquad f(1,1) = (5,2), \qquad f(1,2) = (10,2)$$

gibt es?

H 88. Matrizenrechnung.
Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ drei reelle (3×3)-Matrizen. Es gelte $A \cdot B = C$. Ersetzen Sie in der folgenden Gleichung die Variablen durch Zahlen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 3 \\ a_{21} & 1 & 3 \\ a_{31} & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & b_{12} & 1 \\ 0 & b_{22} & 2 \\ 0 & b_{32} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

H 89. Gegeben seien die linearen Gleichungssysteme

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 2+i & i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$ und $y_1, \ldots, y_3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie die Lösungsmengen der obigen Gleichungssysteme an.

H 90. Sie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Ist f linear, surjektiv, injektiv?

Man ermittle $dim(f(\mathbb{R}^3))$, eine Basis von $f(\mathbb{R}^3)$ und eine Basis von $Kern(f)$.

H 91. Magische Quadrate

Eine reelle 3×3-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ heißt magisches Quadrat, falls alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und die beiden Diagonalsummen $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ und $a_{13} + a_{22} + a_{31}$ miteinander übereinstimmen.

1. Man zeige, daß die Menge M aller magischen Quadrate ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

2. Man zeige, daß die drei Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   eine Basis von M bilden.

3. Besonders magisch: Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen $1, 2, \ldots, 9$ in einem magischen Quadrat anzuordnen?

Abgabetermin ist der 30.01.2006 in der Zentralübung.

— Informationen —

- Vorlesungstausch: Am Montag, den 06.02.2006, findet statt Zentralübung Vorlesung statt - dafür ist am Dienstag, den 07.02.2006, statt Vorlesung Zentralübung.

- Die Semestralprüfung zu dieser Vorlesung findet am Mittwoch, den 15.02.2006, um 9:00 Uhr in MW 0001, MW 2001 und MW 1801 statt.

- Um sicher zu stellen, dass Sie eine Sitzplatz bei der Klausur haben, melden Sie sich unter https://www-m10.ma.tum.de/klausuranmeldung an. Bei dieser Anmeldung entstehen Ihnen keinerlei Nachteile.

- Die Zuordnung, wer in welchem Raum schreibt, wird auf der linearen Algebra Homepage veröffentlicht.

- Zulässige Hilfsmittel sind: Stifte (kein Rot, kein Grün, kein Tintenkiller, kein Tipex), Lineal/Geodreieck und 2 selbst erstellte DIN A4 Blätter (beidseitig)
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handies, Laptops **nicht** erlaubt.

- Rucksäcke sind beim Betreten des Klausurraums unten vor der Tafel (mit abgeschaltetem Handy) abzustellen.