# TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
**Zentrum Mathematik**

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

## Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)
## — Aufgabenblatt 10 (16. Januar 2006) —

### — *Multiple choice - Aufgaben* —

**M 75.** Welche der folgenden Abbildungen sind nicht linear?

☐ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto f(x) := (x+1, x-1)$

☐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := (x_2, 0)$

☐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := (x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2)$

### — *Präsenzaufgaben* —

**P 76.** Gegeben seien zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$. Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ , die auf der Geraden $g$ durch diese beiden Punkte $p$ und $q$ liegen, ist durch die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda \cdot p + \mu \cdot q\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ ;\ \lambda + \mu = 1\}$ gegeben.
Sei nun $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $q = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Zeichnen Sie die Punkte $p$ und $q$ und die Gerade $g$ durch diese beiden Punkte in ein Koordinatensystem.

2. Geben Sie $g$ in Parameterform an, d.h. bestimmen Sie Vektoren $v, w$, so dass $g = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = v + \lambda \cdot w \in \mathbb{R}^2;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. Auf welchem Teil der Geraden befindet sich $x \in \mathbb{R}^2$, wenn

   (i) $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ (iii) $\lambda < 0$ und $\mu > 0$

   (ii) $\lambda > 0$ und $\mu < 0$ (iv) $\lambda < 0$ und $\mu < 0$

   **Hinweis:** Wählen Sie jeweils einige Beispielwerte für $\lambda$ und $\mu$ . Markieren Sie die Teile der Geraden farbig.

**P 77.** Sei $K$ ein Körper.

1. Zeigen Sie: Ist $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von $V$, so ist die Koordinatenabbildung

$$\psi : V \longrightarrow K^n \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i \mapsto \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) := (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

   ein (wohldefinierter) Vektorraumisomorphismus.

2. Seien $V$ und $W$ zwei endlichdimensionale $K$-Vektorräume. Zeigen Sie: Genau dann existiert ein $K$-Vektorraumisomorphismus $\phi : V \longrightarrow W$, wenn $dim_K V = dim_K W$.

**P 78.** Seien $V$, $W$ Vektorräume über dem Körper $K$ und $f : V \longrightarrow W$ linear. Sei $(b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von $V$. Zeigen Sie: $f$ ist genau dann injektiv, wenn $(f(b_1), f(b_2), ..., f(b_n))$ linear unabhängig in $W$ ist.

## — *Hausaufgaben* —

**H 79.** Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität.

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \mapsto f(x,y) := (3x+2y, x)$
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \vartheta x + \zeta$ für feste $\vartheta, \zeta \in \mathbb{R}$
3. $f : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x,y) \mapsto f(x,y) := x + \sqrt{2}y$ (über $\mathbb{Q}$)
4. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{z}$ (über $\mathbb{C}$)
5. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{z}$ (über $\mathbb{R}$)
6. $f : \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi \mapsto f(\varphi) := \varphi(1)$

**H 80.** Sei $V^n(K)$ ein Vektorraum über dem Körper $K$, $\mathcal{B} := (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von $V$, $b := \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu b_\nu$ mit $\beta_\nu \in K$ $(\forall \nu)$ und $\mathcal{B}_\sigma := \{b_1, b_2, ..., b_{\sigma-1}, b, b_{\sigma+1}, ..., b_n\}$.
Zeigen Sie $\forall \sigma \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$\mathcal{B}_\sigma \text{ ist Basis von } V \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta_\sigma \neq 0$$

**H 81. Basiswechsel konkret.**
Gegeben seien die drei Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$ sowie drei weitere Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

1. Die Standardbasis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^3$ besteht aus den drei Einheitsvektoren $e_1,\ e_2,\ e_3 \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.
2. Gegeben seien nun die beiden Vektoren $p = \begin{pmatrix}6\\3\\9\end{pmatrix}$ und $q = \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$. Stellen Sie die beiden Vektoren $p$ und $q$

   (a) als Linearkombination der Vektoren der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ dar und
   (b) als Linearkombination der Vektoren der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ dar.

**H 82.** Seien $V$, $W$ Vektorräume über dem Körper $K$ und $f : V \longrightarrow W$ linear. Sei $(b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von $V$.

1. Zeigen Sie: $f$ ist genau dann surjektiv, wenn $(f(b_1), f(b_2), ..., f(b_n))$ ein Erzeugendensystem von $W$ ist.
2. Nun gelte zusätzlich $V = W$. Zeigen Sie: $f$ ist genau dann injektiv, wenn es surjektiv ist.
   **Hinweis:** Verwenden Sie den Basisaustauschsatz und den Basisergänzungssatz.

**Abgabetermin ist der 23.01.2006 in der Zentralübung**.