TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)
— Aufgabenblatt 9 (09. Januar 2006) —

— *Multiple choice - Aufgaben* —

M 68. Titel
Welche der folgenden Mengen sind Teilräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume?

- $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$
- $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$
- $\{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f(-x) = f(x)\} \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^3$

M 69. Ganz schön span(n)end.
Gegeben sei folgende Menge M von 6 Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_6 \in \mathbb{R}^4$:

$$M = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr ?

☐ span $(v_2, v_3, v_5) =$ span (v_3, v_5)

☐ span $(v_1, v_5, v_6) =$ span $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$

☐ span $(v_2, v_3, v_5) =$ span (v_1, v_3, v_5)

☐ span $(v_1, v_2, v_4) =$ span (v_2, v_3, v_5, v_6)

— *Präsenzaufgaben* —

P 70. Lineare Unabhängigkeit

1. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch $f_n(x) := x^n$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig ist.
2. (a) Zeigen Sie, dass die Menge $L := \{\ln(p) \,|\, p\, prim\} \subset \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\ln(1 + \sqrt{2})$ nicht im Spann von L liegt - die Menge L ist also keine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$.

P 71. Aus H 64 ist bekannt, dass Z_2^3 ein Vektorraum ist. Geben Sie mindestens zwei verschiedene Basen an. Wieviele verschiedene Basen gibt es?

— Hausaufgaben —

H 72. Der Untervektorraum der Linearkombinationen ausgewählter Vektoren.
Gegeben sei die Menge M mit den 6 Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_6 \in \mathbb{R}^4$ aus Aufgabe 69.

1. Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $v_i \in M$, $i = 1, 2, \dots, 6,$ als Linearkombination der anderen Vektoren aus M schreiben lässt.

2. Geben Sie eine Basis des von M aufgespannten Untervektorraums des $\mathbb{R}^4$ an.

3. Betrachten Sie für $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ folgende Vektorgleichung:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 + \lambda_5 \cdot v_5 + \lambda_6 \cdot v_6 = 0.$$

   Betrachten Sie die Menge K aller Vektoren $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$, die obige Vektorgleichung erfüllen:

   $K = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6 \mid \sum_{i=1}^{6} \lambda_i v_i = 0 \right\}.$ Zeigen Sie: K ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^6$.

H 73. Basen von Untervektorräumen.
Bestimmen Sie Basen von den folgenden Untervektorräumen U_K des K^3:

1.) $K = \mathbb{R}$ und $U_{\mathbb{R}} = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

2.) $K = \mathbb{C}$ und $U_{\mathbb{C}} = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2i+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

3.) $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $U_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}} = \text{span}\left(\begin{pmatrix} [2] \\ [3] \\ [0] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [3] \\ [5] \\ [2] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0] \\ [3] \\ [5] \end{pmatrix} \right).$

H 74. Sei V ein ein Vektorraum über dem Körper K, $(v_1, v_2, ..., v_n)$ eine linear unabhängige Familie in V und $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ mit $\alpha_i \in K$. Zeigen Sie. Genau dann ist die Familie $(v_1 - w, v_2 - w, ..., v_n - w)$ linear abhängig, wenn $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Abgabetermin ist der 16.01.2006 in der Zentralübung.