TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)
— Aufgabenblatt 8 (19. Dezember 2005) —

— Multiple choice - Aufgaben —

M 61. Axiomatisch richtig?
Welche der folgenden Aussagen gelten in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V?

☐ $(V\backslash\{0\},\cdot)$ ist kommutative Gruppe.

☐ $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall v,w\in V$ gilt $\lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$.

☐ $(\mathbb{K},\cdot)$ ist kommutative Gruppe.

☐ $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall v\in V$ gilt $\lambda v=v\lambda$.

☐ $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\forall v\in V$ gilt $(\lambda\mu)v=\mu(\lambda v)$.

☐ $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\forall v\in V$ gilt $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$.

☐ $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\forall v\in V$ gilt $\lambda(v+\mu)=\lambda v+\lambda\mu$.

☐ $\forall v\in V$ gilt $(-1)v=-v$.

— Präsenzaufgaben —

P 62. Unitäres Gesetz
Zeigen Sie: Das unitäre Gesetz: $\forall\vec{x}\in V\wedge 1\in\mathbb{K}:1\cdot\vec{x}=\vec{x}$ ist unabhängig von den übrigen Vektorraumaxiomen (d.h. das unitäre Gesetz folgt nicht aus den übrigen Vektorraumaxiomen).

P 63. Es sei $\mathbb{K}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und X eine nicht leere Menge. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ mit der Addition

$$A+B:=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$$

und der skalaren Multiplikation

$$(0+2\mathbb{Z})\cdot A=\emptyset,(1+2\mathbb{Z})\cdot A=A$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. (Für den Beweis der Assoziativität reicht eine Skizze.) Geben Sie einen Vektorraumisomorphismus zwischen $\mathcal{P}(X)$ und dem Vektorraum der Abbildungen $Abb(X,\mathbb{K})$ von X nach $\mathbb{K}$ an, also einen Isomorphismus $\iota:\mathcal{P}(X)\longrightarrow Abb(X,\mathbb{K})$ dessen Bild eines Vektorraumes wieder ein Vektorraum ist (oder ein entsprechendes $\phi:Abb(X,\mathbb{K})\longrightarrow\mathcal{P}(X)$).

— Hausaufgaben —

H 64. Vektorraumnachweis

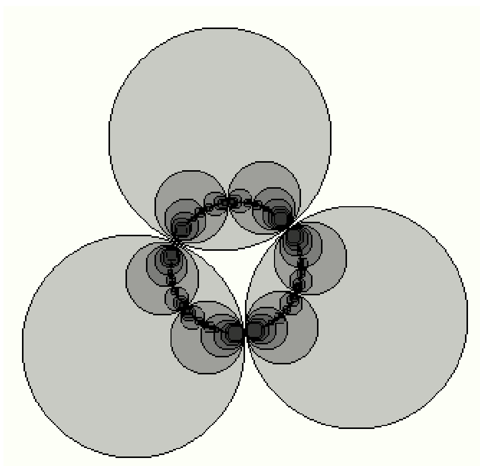
1. Geben Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}_2^3$ an.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_2^3$ ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum ist.

H 65. Vektorraumnachweis
Sei $(\mathbb{K},+,\cdot)$ ein Körper. Auf der Menge $\mathcal{F}$ aller Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}=(a_0,a_1,...)$ mit Elementen $a_i\in\mathbb{K}$, $\forall i$, sei eine Addition $\oplus:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}$ durch $((a_i)_{i\in\mathbb{N}},(b_i)_{i\in\mathbb{N}})\mapsto(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\oplus(b_i)_{i\in\mathbb{N}}:=(a_i+b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und eine Skalarmultiplikation $\circ:\mathbb{K}\times\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}$ durch $(k,(a_i)_{i\in\mathbb{N}})\mapsto k\circ(a_i)_{i\in\mathbb{N}}:=(k\cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erklärt. Zeigen Sie durch Angabe der Vektorraumaxiome, dass $\mathcal{F}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

H 66. Schnitt und Vereinigung von Untervektorräumen.
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, und seien U_1 und U_2 zwei Untervektorräume von V .

1. Zeigen Sie : Die Menge $U_1 \cap U_2 := \{v \in V \,|\, v \in U_1 \wedge v \in U_2\}$ ist wieder ein Untervektorraum von V.
2. Ist auch die Menge $U_1 \cup U_2 := \{v \in V \,|\, v \in U_1 \vee v \in U_2\}$ ein Untervektorraum von V?
3. Ist das direkte Produkt $U_1 \times U_2$ von U_1 und U_2 mit
   $U_1 \times U_2 := \{(v_1, v_2) \,|\, v_1 \in U_1 \wedge v_2 \in U_2\}$ ein Vektorraum?

H 67. Komplexe Weihnachtskugeln
Weihnachtskugeln sind meist von innen verspiegelte Glaskugeln.
Betrachten wir vereinfachend zweidimensionale *Weihnachts*kreise in der Gauß'schen Zahlenebene und deren Bilder unter der Abbildung $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ mit $z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$, die man Kreisspiegelung nennt.
Zeigen Sie: Alle *Weihnachts*kreise lassen sich durch $z\overline{z} - \overline{m}z - m\overline{z} + n = 0$ mit $m \in \mathbb{C}, n = m\overline{m} - r^2 \in \mathbb{R}$ und Kreisradius r darstellen.
Was ist die Fixpunktmenge von f, d.h. an was und warum wird hier „gespiegelt"?
Zeigen Sie, dass die Bilder der *Weihnachts*kreise, welche nicht durch den Ursprung gehen wieder *Weihnachts*kreise sind, d.h., dass f kreistreu ist.
Sein nun $\{2 + ix \in \mathbb{C} | x \in \mathbb{R}\}$ der verlängerte Bischofsstab vom Hl. Nikolaus (bzw. die Rute von Knecht Ruprecht - je nachdem, ob Sie brav gelernt haben und wer bei Ihnen zuhause vorbei gekommen ist). Was sehen Sie in Ihrem *Weihnachts*einheitskreis?



Drei *Weihnachts*kreise und ihre Reflektionen
Diese Spiegelung ist nicht die optische Spiegelung an Weihnachtskugeln, welche „noch komplexer" ist.

Abgabetermin ist der 09.01.2006 in der Zentralübung.

Das Lineare - Algebra - Team wünscht Ihnen gesegnete Weihnachten und ein frohes neues Jahr!