TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)
— Aufgabenblatt 7 (12. Dezember 2005) —

— Präsenzaufgaben —

M 54. Zwei, Drei oder Sechs.
Welche der nachfolgenden komplexen Zahlen sind 2–te Einheitswurzeln (linkes Kästchen), 3–te Einheiswurzeln (mittleres Kästchen) oder 6–te Einheitswurzeln (rechtes Kästchen)?

□□□	i	□□□	$\frac{5}{3}$
□□□	-1	□□□	$e^{i\frac{5}{3}\pi}$
□□□	$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$	□□□	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

P 55. Rechnen wie verhext mit konjugiert komplex.
Es sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Die zu z konjugierte Zahl $\overline{z}$ ist $\overline{z} = a - bi$. Für den Realteil $\mathrm{Re}(z)$ von z gilt $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und für den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ von z gilt $\mathrm{Im}(z) = \frac{-i}{2}(z - \bar{z})$. Die Länge $|z|$ von z ist gegeben durch $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(z \cdot \bar{z})} \in \mathbb{R}$.

1. Überprüfen Sie: $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$: a) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$, b) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$, c) $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$.
2. Es sei $p \in \mathbb{R}[X]$. Man zeige: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p.

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt: Jedes reelle Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad $deg(p) = n \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$ ($p(\xi) = 0$).

3. Folgern Sie daraus und aus Aufgabenteil 2), daß jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ mit ungeradem Grad mindestens eine *reelle* Nullstelle besitzt.
4. Folgern Sie aus Aufgabenteil 2), daß sich jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ in der Form

$$p(X) = \varepsilon(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_r) \cdot (X^2 + \beta_1 X + \gamma_1)(X^2 + \beta_2 X + \gamma_2) \cdots (X^2 + \beta_s X + \gamma_s),$$

mit *reellen Zahlen* $\varepsilon, \alpha_i, \beta_j, \gamma_k$, schreiben lässt.

P 56. Abbildungen in der euklidischen Ebene
Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch $z \mapsto f(z) := a \cdot z + b \cdot \bar{z} + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ gegeben.

1. Interpretieren Sie f in der Gauß'schen Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times i\mathbb{R}$ für die Spezialfälle:
   a) $(a, b, c) = (1, 0, c)$ mit $c \in \mathbb{C}$, b) $(a, b, c) = (a, 0, 0)$ mit $a \in \mathbb{C}^*$, c) $(a, b, c) = (0, 1, 0)$.
2. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Bijektivität von f an.
3. Für welche (a, b, c) ist f abstandserhaltend?
   (f ist abstandserhaltend $\Longleftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{C} : |x - y| = |f(x) - f(y)|$).

— Hausaufgaben —

H 57. Äquivalenz, Nebenklassen, Quotientengruppe und Isomorphie

1. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ mit $x \mapsto x \mod 3$ zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus_{12})$ und $(\mathbb{Z}_3, \oplus_3)$. Geben Sie $Kern(f)$ an.
2. Zeigen Sie, dass $a \sim b :\Longleftrightarrow a - b \in Kern(f)$ auf $\mathbb{Z}_{12}$ eine Äquivalenzrelation definiert.
3. Zeigen Sie: $[a]_\sim = [a]_{Kern(f)}, \forall a \in \mathbb{Z}_{12}$.
4. Geben Sie die Elemente von $\mathbb{Z}_{12}/Kern(f)$ an. Um welche Mengen handelt es sich dabei?
5. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_{12}/Kern(f)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_3$ ist ($\mathbb{Z}_{12}/Kern(f) \cong \mathbb{Z}_3$).

H 58. Wir drehen uns im Kreis.
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der n–ten Einheitswurzeln ist

$$\omega_n = \left\{ e^{i\frac{k}{n}2\pi} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass ω_n zusammen mit der Multiplikation der komplexen Zahlen eine Gruppe ist.
2. Bestimmen Sie sämtliche Untergruppen von ω_6 und geben Sie die zugehörigen Punkte auf dem Einheitskreis an.
3. Weisen Sie nach, dass die Gruppen $(\omega_n, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ isomorph sind.

H 59. In der Gauß'schen Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times i\mathbb{R}$ sind durch $a = 0$, $b = 16$, $c = 16 + 12i$ und $d = 25$ die Dreiecke $\Delta_1 = (a, b, c)$ und $\Delta_2 = (a, c, d)$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass Δ_1 und Δ_2 rechtwinklig sind.
2. Bestimmen Sie $u, v, w \in \mathbb{C}$ so, dass „$f(\Delta_1) = \Delta_2$" mit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $z \mapsto f(z) := u \cdot z + v \cdot \bar{z} + w$?
3. Interpretieren Sie f geometrisch.

H 60. Schatzsuche
In der Seemannskiste des verstorbenen Kapitäns hatte Legrand den Plan für einen Piratenschatz gefunden. Er enthielt folgende Erklärung:
Der Schatz liegt auf Treasure Island. Gehe die Strecke von der großen Eiche E zum verfallenen Leuchtturm L, von dort unter einem rechten Winkel die gleiche Strecke nach rechts und markiere diesen Punkt mit R. Gehe dann von der Eiche zur Quelle Q und von dort nach links unter einem rechten Winkel um die Strecke $d(E, Q)$ weiter bis zum Punkt S. Der Schatz liegt auf halber Strecke zwischen R und S.
Legrad fand auf der Insel den Leuchtturm und die Quelle, aber die Eiche war verschwunden. Dennoch fand er nach einigen Überlegungen den Schatz. Hätten Sie das auf komplexen Wegen auch geschafft?

Abgabe der Hausaufgaben:

am Montag, 19. Dezember 2005, in der Zentralübung (im HS 1)