TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)
— Aufgabenblatt 6 (5. Dezember 2005) —

— Präsenzaufgaben —

P 46. Ordnung im Wald der Morphismen
Gegeben seien die Mengen $(X, \circ)$ und $(Y, \Box)$ jeweils mit Verknüpfung sowie die strukturerhaltende Abbildung

$$f: \ X \to Y \ \text{ mit } \ f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) \,\Box\, f(x_2).$$

Unter welchen Voraussetzungen an X, Y und f ist f ein Homo-, Mono-, Epi-, Iso-, Endo- oder Automorphismus? Geben Sie jeweils ein einfaches Beispiel an.

M 47. Was bin ich?
Welche der angegebenen Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen und sogar Gruppenisomorphismen?
$G = (\mathbb{Z}, +), H = (2\mathbb{Z}, +)\,;\ f : G \to H,\ x \mapsto 4x;\ \ G = H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +); f : G \to H\ ,\ x \mapsto x^2$
$G = H = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)\,; f : G \to H\ ,\ x \mapsto x + x;\quad G = H = (\mathbb{R}^*, \cdot); f : G \to H\ ,\ x \to x^n,\ (n \in \mathbb{N})$
$G = H = (\mathbb{R}, +);\ f : G \to H\ ,\ x \mapsto x^2$

P 48. Ist R ein Ring, M eine beliebige nichtleere Menge und S = Abb $(M; R)$ die Menge aller Abbildungen von M nach R, so ist auf S durch

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m), \qquad (f \cdot g)(m) := f(m) \cdot g(m),$$

eine Addition und eine Multiplikation erklärt.

a) Zeigen Sie, dass S auf diese Weise zu einem Ring wird.

b) Ist S ein Körper, falls R ein Körper ist?

P 49. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $g \in G$. g hat die Ordnung $n \in \mathbb{N}^*$, falls $\exists n \in \mathbb{N}^*$:
$g^n = \underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{n\,\text{mal}} = e \ \text{ und } \ g^k \neq e \ \forall k < n,\ \ k \in \mathbb{N}^*$

1) Geben Sie einen Isomorphismus von $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ nach $[0, 1[\, \cap\, \mathbb{Q}$ an. Wie ist dabei die Verknüpfung auf $[0, 1[\, \cap\, \mathbb{Q}$ zu wählen? Geben Sie $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ durch seine Elemente an.

2) Zeigen Sie: Jedes Element der Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hat endliche Ordnung.

3) Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ist $f_n : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ f_n([x]_\mathbb{Z}) = n \cdot [x]_\mathbb{Z}$ ein Epimorphismus. Geben Sie $Kern(f_n)$ an.

4) Beweisen Sie, dass $Kern(f_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt.

— *Hausaufgaben* —

H 50. Ringe oder Körper?
Sind die nachfolgenden Mengen zusammen mit den entsprechenden Verknüpfungen Ringe (linkes Kästchen) oder sogar Körper (rechtes Kästchen)? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
□ □ $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
□ □ $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$
□ □ $\mathbb{C}[X]$
□ □ $2\mathbb{Z}$
□ □ $\mathbb{Z}_{91}$
□ □ $\mathbb{Z}_{569}$
□ □ $\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$

H 51. Ringe.
Gegeben sei die Menge $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

1.) Skizzieren Sie die Menge $\mathbb{Z}[i]$ in der Ebene der komplexen Zahlen.

2.) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[i]$ zusammen mit der Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen ein Ring ist.

3.) Skizzieren Sie die Menge $2\mathbb{Z}[i] = \{2x | x \in \mathbb{Z}[i]\}$.

4.) Zeigen Sie, daß $(2\mathbb{Z}[i], +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}[i], +)$ ist.

5.) Wie viele Elemente hat die Quotientengruppe $\mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$?

6.) Für welche Zahl $x \in \mathbb{Z}[i]$ hat die Quotientengruppe $\mathbb{Z}[i]/x\mathbb{Z}[i]$ genau zwei Elemente?

H 52. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Körper mit 3 bzw. 4 Elementen.

H 53. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K[t]$ der Polynomring in einer Unbestimmten.

a) Zeigen Sie, dass in der Menge $K[t] \times (K[t] \backslash \{0\})$ durch

$$(g, h) \sim (g', h') \Leftrightarrow gh' = g'h$$

eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

$K(t)$ sei die Menge der Äquivalenzklassen. Die zu (g, h) gehörige Äquivalenzklasse sei mit $\frac{g}{h}$ bezeichnet. Somit ist $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'} \Leftrightarrow gh' = g'h$.

b) Zeigen Sie, dass in $K(t)$ die Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ wie folgt

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \odot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

wohldefiniert sind.

c) Zeigen Sie schließlich, dass $K(t)$ mit diesen Verknüpfungen zu einem Körper wird. Man nennt $K(t)$ den *Körper der rationalen Funktionen*.

Abgabetermin ist der 12.12.2005 in der Zentralübung.
Hausaufgabentutorien immer donnerstags in MW 1350 ab 16 Uhr und freitags in MI 02.06.011 ab 14 Uhr.