TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)
— Aufgabenblatt 5 (28. November 2005) —

— *Präsenzaufgaben* —

P 40. In welcher Klasse bin ich?
Überprüfen Sie, ob nachstehende Relationen auf M Äquivalenzrelationen auf M sind. Geben Sie gegebenenfalls eine geometrische Beschreibung der Äquivalenzklassen an: In welche Partitionen wird $\mathbb{R}^2$ aufgeteilt ?

1.) $M := \mathbb{R}^2\,,\ (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

2.) $M := \mathbb{R}^2\,,\ (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$

3.) $M := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}\,,\ (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$

P 41. Äquivalenzrelationen oder was?
Seien r eine Gerade und k ein Kreis (eine Kreislinie) in $\mathbb{R}^2$. Seien $G = \{g \subset \mathbb{R}^2 |\ \text{g eine Gerade}\}$ und $H = \{h \subset \mathbb{R}^2 |\ \text{h eine Gerade} \wedge |H \cap k| = 2\}$. In G werde die Relation $\sim_G$ und in H werde die Relation $\sim_H$ definiert durch:

$$p \ \sim_G \ q \quad :\Longleftrightarrow \quad p \cap r = q \cap r,$$

$$p \ \sim_H \ q \quad :\Longleftrightarrow \quad p = q \quad \vee \quad \emptyset \neq p \cap q \subset k.$$

Überprüfen und beweisen Sie, ob $\sim_G$ bzw. $\sim_H$ reflexiv, symmetrisch, transitiv und/oder Äquivalenzrelationen sind.

— *Hausaufgaben* —

H 42. Restklassengruppen und modulo-Rechnung
Betrachten Sie auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen folgende Relation $\sim$:

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad a + 7\mathbb{Z} = b + 7\mathbb{Z}$$

wobei $7\mathbb{Z} = \{\ldots, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \ldots\}$.

1.) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Bestimmen Sie anschließend alle Äquivalenzklassen

$$M = \{[a] \;\Big|\; a \in \mathbb{Z}\} \quad \text{mit} \quad [a] = \{b \in \mathbb{Z} \;\Big|\; a \sim b\}.$$

2.) Die Menge M sollte Ihnen bekannt sein: Es ist $M = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Wo finden sich die Begriffe *Rechtsnebenklasse* und *Linksnebenklasse* in obiger Definition wieder?

3.) Auf $M = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ist die Addition $[a] + [b] = [a + b]$ definiert. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe ist.

4.) Gegeben sei nun zusätzlich die Gruppe $(\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}, \oplus_7)$. Zeigen Sie, dass

$q : \begin{cases} \mathbb{Z}_7 & \rightarrow & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \\ k & \mapsto & [k] \end{cases}$ ein Gruppenisomorphismus ist.

H 43. Gegeben sei der Graph $G = (E, K)$ durch

$$\begin{aligned} E &:= \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8\} \text{ und} \\ K &:= \{(E_1, E_2), (E_1, E_3), (E_1, E_4), (E_2, E_5), (E_2, E_6), (E_3, E_5), \\ &\qquad (E_3, E_7), (E_4, E_6), (E_4, E_7), (E_5, E_8), (E_6, E_8), (E_7, E_8)\} \,. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie einen Repräsentanten von G und bestimmen Sie die Mächtigkeit der Automorphismengruppe dieses Graphen.

H 44. Klein ist fein.
Die Untergruppe

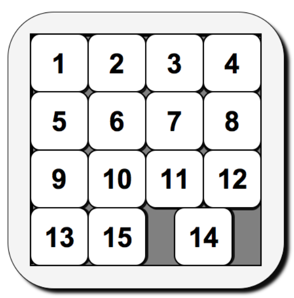
$$\mathsf{V}_4 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathsf{S}_4$$

heißt KLEINsche Vierergruppe.

1.) Zeigen Sie, dass V_4 tatsächlich eine Untergruppe von S_4 ist.

2.) Bestimmen Sie sämtliche Links– und sämtliche Rechtsnebenklassen von V_4 in S_4.

H 45. Puzzlespaß
Gelingt es dieses Puzzle lösen? ... und wieso bzw. wieso nicht?
Hinweis: Betrachten Sie jede Puzzlekonfiguration als Element $f \in S_{15}$, wobei sie das "Loch" ignorieren. Jeder Spielzug führt Sie so zu einer neuen Konfiguration und damit zu einem anderen Element aus S_{15}. Hilft Ihnen die Summe $\mathit{Fehlstand} + \mathit{Zeilennummer\ des\ Lochs} \mod 2$ weiter?
Alternativ: Betrachten Sie $E_{16} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \mathit{Loch}\}$ und jede Puzzlekonfiguration als ein Element $f : E_n \to E_n \in S_{16}$. Jeder Spielzug führt Sie so zu einer neuen Konfiguration und damit zu einem anderen Element aus S_{16}. Helfen Ihnen Transpositionen weiter?



— Informationen —

- **Abgabetermin ist der 05.12.2005 in der Zentralübung**.
- Aus gegebenem Anlass möchten wir auf folgendes hinweisen:
  In den Tutorgruppen besteht für den Tutor **nicht** die Pflicht alle Aufgaben durchzurechnen!
  Die Aufgaben sind ein Angebot unsererseits an Sie, welche helfen sollen eventuelle Probleme mit dem Vorlesungsstoff aufzuzeigen. Sie als Student sind dazu aufgerufen, ihre offenen Fragen beispielsweise durch gemeinsames Erarbeiten (sowohl mit Ihren Komolitonen als auch mit Ihrem Tutor) zu klären und so die Präsenzübungen sinnvoll und für Sie gewinnbringend zu gestalten. Aufgaben, die Sie nicht in den Übungen besprochen haben, sollten natürlich trotzdem nachbereitet werden, wozu die Lösungsvorschläge auf der Homepage eine Unterstützung bieten. Entstehen dabei Fragen, so können Sie diese wie gesagt in einer Tutorübung klären.
  Fazit: **Wir schaffen die Bedingungen** unter denen **Sie lernen** können.
  Haben sie Fragen/Anregungen/Wünsche diesbezüglich, dann wenden Sie sich bitte an uns!