TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)
— Aufgabenblatt 4 (21. November 2005) —

— Multiple choice - Aufgaben —

M 31. Untergruppen
Gegeben seien die folgenden Gruppen und Teilmengen. Entscheiden Sie, welche der Teilmengen Untergruppen sind:

1) Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{Z}_{12}, \bigoplus_{12})$
   $\{\}$; $\{0,6\}$; $\{6\}$; $\{0,3,5,8\}$

2) Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$
   $\{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{R}\}$; $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; $\{x \in \mathbb{R} \mid 5x + 1 = 0\}$; $\{x \in \mathbb{R} \mid 5x = 0\}$

— Präsenzaufgaben —

P 32. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit endlich vielen Elementen. Die von $A \subseteq G$ $(A \neq \emptyset)$ **erzeugte Menge** $\langle A \rangle$ ist definiert durch $\langle A \rangle := \{\prod_{i=1}^{n} a_i \mid n \in \mathbb{N} \wedge a_i \in A\}$.
Zeigen Sie: $\langle A \rangle$ ist die kleinste Untergruppe von G, die A enthält $(A \subseteq \langle A \rangle)$, also dass gilt:

1) $\langle A \rangle$ ist Untergruppe von G mit $A \subseteq \langle A \rangle$, (d. h. $A \subseteq \langle A \rangle \leq G$).

2) Ist H Untergruppe von G $(H \leq G)$ mit $A \subseteq H \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq H$.

$\langle A \rangle$ heißt die von $A \subseteq G$ **erzeugte Untergruppe**

P 33. Konjugation ist ein Automorphismus.
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Für ein Element $a \in G$ definieren wir die Abbildung

$$f_a : \begin{cases} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & a \circ x \circ a^{-1}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_a ein Gruppenautomorphismus, d. h. ein Gruppenisomorphismus von G auf sich, ist.

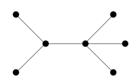
P 34. Fehlstand und Signum
Für eine Permutation $f \in S_n$ ist die Zahl der Fehlstände $F(f)$ definiert als die Anzahl der Paare $(i,j),\ i,j \in E_n$ mit $i < j$ und $f(i) > f(j)$. Für das Signum sgn (f) von f gilt: sgn $(f) = (-1)^{F(f)}$.

1) Für $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$ aus H29 bestimme man das entsprechende Signum.

2) Ein 2–Zykel $(x_1 x_2)$ heißt Transposition. Als benachbarte Transposition bezeichnen wir Zykel der Form $(x\ \ x+1)$ mit $x,\ (x+1) \in E_n$.
   Zeigen Sie: Jede Transposition lässt sich als Produkt benachbarter Transpositionen schreiben.

P 35. Automorphismengruppen von Graphen
Ein Graph ist durch ein Tupel (E, K) bestehend aus der Menge seiner Ecken E und der Menge seiner Kanten
$K \subseteq E \times E$ gegeben.
Eine Gruppe G operiert auf einer Menge M, falls $\forall g \in G : g(M) \subseteq M$ gilt.
Ein Graphenautomorphismus von (E, K) ist eine bijektive Abbildung $\alpha : E \to E$ mit der Eigenschaft : $(i, j) \in K \Longleftrightarrow (\alpha(i), \alpha(j)) \in K$

1) Zeigen Sie: $G = \{\alpha : E \to E \mid \alpha \text{ ein Graphenautomorphismus}\}$ ist eine Gruppe, die auf E operiert.

2) Geben Sie G für den folgenden Graphen an: 

— Hausaufgaben —

H 36. Transpositionen tun sich zusammen: Gemeinsam sind wir stark.
Gegeben sei die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 8 & 1 & 9 & 2 & 10 & 3 & 11 & 4 & 12 & 5 & 13 & 6 & 14 & 7 \end{pmatrix} \in \mathsf{S}_{14}.$$

1.) Schreiben Sie π als Produkt von paarweise elementfremden Zyklen.

2.) Stellen Sie π als Produkt von Transpositionen dar.

3.) Welches Signum besitzt π?

4.) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Stellen Sie den Zyklus $(1\ 2\ 3 \ldots n) \in \mathsf{S}_n$ als Produkt von Transpositionen dar. Welches Signum hat $(1\ 2\ 3 \ldots n)$?

H 37. Die Symmetriegruppe des regelmäßigen Vierecks.
Wir definieren die drei Abbildungen $\mathrm{id}, \sigma, \tau : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ durch $\mathrm{id}(n) = n$ und $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 3$, $\sigma(4) = 2$, sowie $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 3$, $\tau(3) = 4$, $\tau(4) = 1$. Bestimmen Sie die Menge D aller Abbildungen, die durch alle mögliche Verknüpfungen von id, σ und τ entstehen können, also

$$D = \{\mathrm{id},\ \sigma,\ \tau,\ \sigma \circ \sigma,\ \sigma \circ \tau,\ \tau \circ \sigma,\ \tau \circ \tau,\ \sigma \circ \sigma \circ \sigma,\ \sigma \circ \sigma \circ \tau,\ \sigma \circ \tau \circ \sigma,\ \sigma \circ \tau \circ \tau, \ldots\}.$$

Überprüfen Sie, dass D eine Untergruppe von S_4 ist. Listen Sie möglichst viele Untergruppen von D auf. Was ergibt sich, wenn man das Viereck als Graph interpretiert?

H 38. Die geheimen Freuden des General N. Bourbaki.
Beweisen Sie folgendes Untergruppenkriterium: Es seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und H eine Teilmenge von G. Das Paar $(H, \circ)$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn die beiden nachfolgenden Bedingungen gelten:

1. H ist nicht die leere Menge.

2. Für alle $x, y \in H$ ist $x \circ y^{-1} \in H$, wobei y^{-1} das (in G gebildete) Inverse zu y ist.

H 39. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_6, \bigoplus_6)$

Abgabetermin ist der 28.11.2005 in der Zentralübung.