TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIER

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)

— Aufgabenblatt 3 (14. November 2005) —

— Multiple choice - Aufgaben —

M 22. Wer wird Millionär mit Gruppenaxiomen.
Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Das zu $g \in G$ inverse Element werde mit g^{-1} bezeichnet. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

☐ $\exists h \in G\ \ \forall g \in G:\ h \circ g = e$

☐ $\forall g \in G\ \ \forall f \in G:\ g \circ f \circ g^{-1} = f$

☐ $\forall g, f, h, k \in G:\ (g \circ f) \circ (h \circ k) = g \circ ((f \circ h) \circ k)$

☐ $\exists h \in G\ \ \forall g \in G:\ h \circ g = h$

☐ $\forall g \in G\ \ \exists h \in G:\ h \circ g = e$

— Präsenzaufgaben —

P 23. Welche der folgenden Abbildungen sind surjektiv, injektiv bzw. bijektiv?

$$\begin{array}{llllll} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & (x,y) & \mapsto & (x-y,\, x+y) \\ f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & x & \mapsto & (2x,\, x-1) \\ f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & (x,y) & \mapsto & (xy,\, x+y) \end{array}$$

P 24. Eine Menge X heißt **endlich**, wenn es eine natürliche Zahl n und eine bijektive Abbildung $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to X$ gibt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei X eine endliche Menge und $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to X$ bzw. $g : \{1, 2, \ldots, m\} \to X$ seien bijektiv. Dann gilt $m = n$. (Man schreibt $|X| := n$, die **Mächtigkeit von X**.)

b) Sei X eine endliche Menge. Eine Abbildung $f : X \to X$ ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

P 25. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $E_n := \{1, \ldots, n\}$. Die **symmetrische Gruppe** $(\mathbf{S_n}, \circ)$ ist gegeben als Menge der Permutationen: $S_n := \{f : En \to En\ | f \text{ bijektiv}\}$ zusammen mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung.
Seien $x_1, x_2, \ldots x_k \in E_n$ paarweise verschiedene Elemente. Der k–Zykel $(x_1 x_2 \ldots x_k)$ ist diejenige Permutation $f \in S_n$ mit $f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_3,\ \ldots,\ f(x_{k-1}) = x_k,\ f(x_k) = x_1$ sowie $f(x) = x\ \forall x \in E_n \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.
Alternativ läßt sich ein Element $f \in S_n$ auch in Werteschreibweise $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$ angeben.

a) Geben Sie für $g : E_8 \to E_8$ mit $g = (136) \circ (523) \circ (61) \circ (834) \circ (17)$ das Ergebnis in Werteschreibweise an.

b) Zwei Zykel $(x_1 x_2 \ldots x_k)$ und $(y_1 y_2 \ldots y_l)$ heißen elementfremd, wenn $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \cap \{y_1, y_2, \ldots, y_l\} = \emptyset$.
Geben Sie ein Verfahren an, wie man von der Werteschreibweise einer Permutation auf die elementfremde Zykelschreibweise kommt.
Wie lautet g aus a) als Produkt elementfremder Zykel?

c) Zeigen Sie : Für ein k–Zykel z gilt $z^k = id$ und $\forall j < k : z^j \neq id$. ($z^k := \underbrace{z \circ z \circ \ldots \circ z}_{k \text{ mal}}$)

— *Hausaufgaben* —

H 26. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

c) Ist g surjektiv und f injektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.

d) Sind g und f injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

e) Sind g und f surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

H 27.

a) Geben Sie die fehlende Definitions– bzw. Wertemenge so an, dass die folgenden Abbildungen bijektiv werden.

$$\begin{array}{llllcll} f: & \mathbb{R} & \to & & ; & x & \mapsto & (2x, x-1) \\ f: & & \to & \mathbb{R}^+ & ; & x & \mapsto & x^2+2x-3 \end{array}$$

b) Geben Sie eine surjektive und nicht injektive sowie eine nicht surjektive aber injektive Abbildung $f: [0,1] \to [0,1]$ an.

H 28. Die symmetrische Gruppe $\mathbf{S_n}$

a) Wie viele Elemente besitzt S_n? (Beweis)

b) Sei $f = z_1 \circ z_2 \circ \ldots \circ z_m$ eine Zerlegung in paarweise elementfremde Zykel. Zeigen Sie: Die Ordnung von f ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der Zykel z_i $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$

H 29. Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_6$ mit $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ und $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie $\pi_2 \circ \pi_1$, π_1^{-1}, π_2^{-1}, π_2^{27}, π_1^8 und geben Sie das Ergebnis in Werte- und Zykelschreibweise an.

b) Finden Sie die Lösungen $x \in S_6$ der Gleichung $\pi_1 \circ x \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$.

H 30. Die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks
Die abstandserhaltenden Abbildungen des $\mathbb{R}^2$, die ein gleichseitiges Dreieck auf sich abbilden, permutieren dessen Ecken A_1, A_2 und A_3.

a) Zeigen Sie, dass die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks zur Permutationsgruppe S_3 isomorph ist.

b) Welche Zykel entsprechen Achsenspiegelungen und welche Drehungen des $\mathbb{R}^2$?

Abgabetermin ist der 21.11.2005 in der Zentralübung.