TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Mathematik für Physiker 1 (WS 2005/06)
— Aufgabenblatt 1 (31. Oktober 2005) —

— Multiple choice - Aufgaben —

M 5. Abgeschlossene Operatoren.
Entscheiden Sie, welche der angegebenen Mengen bezüglich der jeweils angegebenen Operationen abgeschlossen sind:

	$\frac{1}{(\ldots)}$	$\sqrt{\ldots}$	5% von ...	200% von ...	$2^{(\ldots)}$
$\mathbb{N}$					
$\mathbb{Z}-\{0\}$					
$\mathbb{Q}$					
$\mathbb{R}$					
$\mathbb{R}^+$					
$\mathbb{C}$					

— Präsenzaufgaben —

P 6. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{7}],+)$ und $(\mathbb{Q}[\sqrt{7}]^*,\cdot)$ Gruppen sind.

P 7. Bitte geben Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit einem, zwei, drei und vier Elementen an.

P 8. Die Gruppe der Isometrien des eindimensionalen Raumes.
Die Menge G der abstandserhaltenden Abbildungen ist definiert durch

$$G := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt } |x-y| = |f(x) - f(y)|\}.$$

Die Operation “$\circ$” bildet zwei Abbildungen $f, g \in G$ auf eine Abbildung $h := f \circ g$ ab. Diese Operation ist elementweise definiert: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

a.) Geben Sie wenigstens drei Elemente von G explizit an.

b.) Zeigen Sie, daß G unter der Operation “$\circ$” abgeschlossen ist.

c.) Überprüfen Sie, daß $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.

— Hausaufgaben —

H 9. Sei D die Menge aller rationalen Zahlen x, für die gilt: In einer gekürzten Bruchdarstellung $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ ist q durch 7 teilbar.

a) Ist $(D, +)$ eine Gruppe? Begründung!

b) Ist $(D, \cdot)$ eine Gruppe? Begründung!

H 10. Vervollständigen Sie bitte die Gruppentafel.

	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

H 11. Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$ der euklidischen Ebene.

a) Geben Sie die vier abstandserhaltenden Abbildungen der euklidischen Ebene an, welche das Punktepaar (A, B) invariant lässt (d.h. „$f(\{A, B\}) = \{A, B\}$“).

b) Zeigen Sie, dass die Menge S dieser Abbildungen bzgl. der Hintereinanderausführung $\circ$ abgeschlossen ist.

c) Überprüfen Sie, ob $(S, \circ)$ eine Gruppe ist und stellen Sie gegebenenfalls die Gruppentafel auf.

H 12. Die Gruppe der Drehungen der euklidischen Ebene.
Eine Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ um den Ursprung mit Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$D_\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x\cos\varphi \, - \, y\sin\varphi \\ x\sin\varphi \, + \, y\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Es sei $(G = \{D_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}, \circ)$ eine Menge mit Verknüpfung. Hierbei bezeichne $D_\psi \circ D_\varphi$ die Hintereinanderausführung bzw. Komposition der Drehungen D_ψ und D_φ.

1) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei ein Dreieck durch die Eckpunkte $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ gegeben. Dieses werde jeweils um den Winkel $\varphi_1 = \pi/2$ und $\varphi_2 = -\pi/4$ gedreht. Zeichnen Sie diese drei Dreiecke.

2) Zeigen Sie, daß $(G, \circ)$ eine *kommutative* Gruppe ist.

— Informationen —

- Bitte geben Sie die Hausaufgaben in zweier bis vierer Gruppen ab.
- Blätter mit nur einem Namen darauf werden nicht korrigiert.
- Die Aufgaben bitte in einem mit Namen und Tutorgruppennummer beschrifteten Schnellhefter abgeben. Danke!
- **Abgabetermin ist der 7.11.2005 in der Zentralübung**.
- Für Fragen stehen wir Ihnen gerne während unserer Sprechstunden zur Verfügung.