Gruppe B

Aufgabe 1. (Punkte: 8)

1	2
8	

Auf $\mathbb{R}^2$ sei als innere Verknüpfung die übliche Addition $+$ und eine spezielle äußere Verknüpfung $\circ$ definiert:

$$+ : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \circ : \begin{cases} \overset{\mathbb{R}}{\cancel{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix} \end{cases}$$

Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?

B1

Ja	Nein		
☒	☐	$(\mathbb{R}^2, +)$ ist kommutative Gruppe	2
☒	☐	$(\mathbb{R}^2, +, \circ)$ ist distributiv	2
☐	☒	$\forall v \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \circ v = v$	2
☐	☒	$\forall v \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad (\lambda \cdot \mu) \circ v = \lambda \circ (\mu \circ v)$	2

Aufgabe 2. (Punkte: 12)

1	2
12	

Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom höchstens dritten Grades, d.h. $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Es gelte: $p(1) = 1$, $p(0) = 4$, $p(-1) = 1$ und $p(3) = \lambda \in \mathbb{R}$.
Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten a, b, c, und d auf und bestimmen Sie a, b, c und d.
Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Grad von p kleiner 3, d.h. $deg(p) < 3$?

B2

<u>Ansatz:</u> $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

LGS 2

$p(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1$

$p(0) = 4 \Rightarrow \underline{d = 4}$

$p(-1) = 1 \Rightarrow -a + b - c + d = 1$

$\Rightarrow 2b + 2d = 2 \Rightarrow \underline{b = -3}$

$2a + 2c = 0 \Rightarrow \underline{c = -a}$

$p(3) = \lambda \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = \lambda \Rightarrow 27a - 27 - 3a + 4 = \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow 24a = \lambda + 23 \Rightarrow \underline{a = (\lambda + 23)/24}$ 8

grad von $p < 3 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = -23}$ 2

Aufgabe 3. (Punkte: 12)

1	2
12	

Gegeben seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ durch $a = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \vartheta \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit $\vartheta \in \mathbb{R}$).

Zeigen Sie: $\exists \vartheta \in \mathbb{R}$, so dass $span(a, b) = span(c, d)$.

(B3) Ansatz: $a, b \in span(c,d) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \lambda c + \mu d = a$ bzw b

$$\Rightarrow LGS \left(\begin{array}{cc|c:c} -1 & -4 & 5 & 2 \\ 7 & 10 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & \vartheta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c:c} 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & -18 & 36 & 18 \\ 0 & -7 & 14 & \vartheta+4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c:c} 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta-3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \vartheta = 3$$

$\Rightarrow span(a,b) \subseteq span(c,d)$ für $\vartheta = 3$ (eindeutig) lösbar (8)

Für $\vartheta = 3$ sind a und b linear unabhängig (offensichtlich)

$\Rightarrow \dim(span(a,b)) = 2 \Rightarrow span(a,b) = span(c,d)$ (4)

Aufgabe 4. (Punkte: 12)

1	2
12	

Sei $0 < r \in \mathbb{R}$ und $M := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -ry & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \right\}$.

Zeigen Sie, dass M zusammen mit dem Matrixprodukt $\cdot$ eine kommutative Gruppe ist.

(B4) a) M abgeschlossen, da für $\begin{pmatrix} x & y \\ -ry & x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} u & v \\ -rv & u \end{pmatrix} \in M$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -ry & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ -rv & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yrv & xv + yu \\ -ryu - rvx & -ryv + xu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - ryv & xv + yu \\ -r(xv+yu) & xu - ryv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -rb & a \end{pmatrix}$$

liegt in M, d.h. $(a,b) \neq (0,0)$, da (1)

Annahme: $a = xu - ryv = 0 \wedge b = xv + yu = 0 \overset{a\cdot v}{\Rightarrow} xuv - ryv^2 = 0 \overset{b}{\Rightarrow}$

$-yu^2 - ryv^2 = 0 \Leftrightarrow y\underbrace{(u^2 + rv^2)}_{\neq 0 \text{ nach Vor.}} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} xu = 0 \\ \text{und} \\ xv = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$ ↯ (3)

b) Für $x = 1$ und $y = 0$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ (neutrales Element!) (2)

c) Inverses Element zu $\begin{pmatrix} x & y \\ -ry & x \end{pmatrix} \in M$ ist (nach Formel):

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -ry & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} x & y \\ -ry & x \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x & -y \\ ry & x \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + ry^2} \begin{pmatrix} x & -y \\ ry & x \end{pmatrix} \in M, \text{ da } x^2 + ry^2 \neq 0$$

Für $r > 0$!

(4)

d) Assoziativität gilt allgemein bei Matrizenprodukt (1)

e) Kommutativität: (1)

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -rv & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -ry & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux - rvy & uy + vx \\ -rvx - ruy & -rvy + ux \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - ryv & xv + yu \\ -r(xv+yu) & xu - ryv \end{pmatrix} \text{ vgl. a)}$$

Aufgabe 5. (Punkte: 10)

1	2
10	

a) Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{Z}_3$ sämtliche Lösungen $x \in \mathbb{Z}_3^3$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^3$.

b) Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{C}$ sämtliche Lösungen $x \in \mathbb{C}^2$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2i & \alpha i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und $b = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{C}$.

B5 a) $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\1&2&1&2\\2&2&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\0&2&2&1\\0&2&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\0&2&2&1\\0&0&2&0\end{array}\right)\sim x=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3^3$$

(Eigenvektor) 4

b) $$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&i\\2i&\alpha i&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&2&i\\-2&-\alpha&i\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&2&i\\0&4-\alpha&3i\end{array}\right)$$ 2

Fall $\alpha = 4$ $\Rightarrow$ es gibt keine Lösung ($\mathbb{L} = \emptyset$) 2

Fall $\alpha \neq 4$ $\Rightarrow$ $x_2 = \frac{3i}{4-\alpha}$; $x_1 = i - \frac{6i}{4-\alpha} = i\left(\frac{-2-\alpha}{4-\alpha}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -i\left(\frac{2+\alpha}{4-\alpha}\right) \\ \frac{3i}{4-\alpha} \end{pmatrix}$ 2

Aufgabe 6. (Punkte: 18)

1	2
18	

Gegeben sei die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in S_8$.

B6

a) Stellen Sie π als Produkt paarweise elementfremder Zykel dar und berechnen Sie π^{2006}.

b) Geben Sie π^{-1} an.

c) Welche Ordnung hat die von π erzeugte Untergruppe der S_8?
☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐7 ☐8 ☒12 ☐15 2

d) Wie viele Transpositionen sind zur Darstellung von π mindestens notwendig?
☐2 ☐3 ☐4 ☒5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 3

e) Lässt sich π als Produkt von n ($n \in \mathbb{N}$) nicht notwendigerweise verschiedenen 3-Zykeln darstellen?
Achtung: falsche Antwort gibt hier (bei 6,e) Punktabzug!
☐*Ja* ☒*Nein*

4 0 -4 !

---

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} = (1345)(267)$ (eindeutig bis auf zykl. Vertauschung) 2

Wegen $2006 \bmod 3 = 2006 \bmod 4 = 2006 \bmod 12 = 2$ gilt:

$\pi^{2006} = (1345)^{2006}(267)^{2006} = (1345)^2(267)^2 =$
$= (14)(35)(276)$ bzw.

$\pi^{2006} = \pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 5

b) $\pi^{-1} = (1345)^3(267)^2 = (1543)(276) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 2

1	2
18	

Aufgabe 7. (Punkte: 18)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einer linearen Abbildung $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & Ax \end{cases}$.

a) Geben Sie für $Kern(f)$ und $Bild(\mathbb{R}^3)$ jeweils die Dimension und eine Basis an.

b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie alle Eigenwerte von A an.

B7 a) $Kern(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\} \Rightarrow$ homogenes LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 6 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_3 = \lambda \in \mathbb{R},\ x_2 = -\frac{\lambda}{2},\ x_1 = \frac{1}{3}(-\lambda + 2\lambda) = +\frac{\lambda}{3}$; Mit $\lambda = 6\cdot\mu \Rightarrow$ 3

$Kern(f) = \left\{ x = \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$; $\dim(Kern(f)) = 1$; $B_{Kern(f)} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$ 2

Rang(A) Basen

$\dim(\overset{\text{Rang}(A)}{\overset{\shortparallel}{Bild(f)}}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(Kern(f)) = 3 - 1 = 2$; $B_{Bild(f)} = \left(\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ 3

b) $A \cdot v = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54+12+18 \\ -36+8 \\ -36-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ -28 \\ -42 \end{pmatrix} = -14 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -14 \cdot v$ 3

c) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, id_{3\times 3}) = \det \begin{pmatrix} -9-\lambda & 6 & 6 \\ 6 & 4-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (-9-\lambda)[(4-\lambda)(-2-\lambda)] - 6\cdot[6(-2-\lambda)] + 6\cdot[-(4-\lambda)\cdot 6] =$

$= (-9-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 8] + 72 + 36\lambda + 36\lambda - 144$

$= -\lambda^3 + \lambda^2(-9+2) + \lambda(18 + 8 + 36 + 36) + 72 + 72 - 144$

$= -\lambda^3 - 7\lambda^2 + 98\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 7\lambda - 98)$ 4

Eigenwerte von A sind Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$:

$\lambda_1 = 0$ (vgl. a)!), $\lambda_2 = -14$ (vgl. b)!) $\Rightarrow \lambda_3 = -\frac{98}{-14} = 7$ 3

oder mit Formel für quad. Gl.